UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 1. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 6.5.2014

---

1. Aufgabe

1. Überführung in Fixpunktproblem:

$$\frac{1}{2}e^{-x^2} - x = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^{-x^2} = g(x).$$

   $\overline{x}$ löst die Gleichung $\Leftrightarrow$ $\overline{x}$ ist Fixpunkt von g.

2. Es gilt immer $e^{-x^2} > 0$. Das Maximum von g findet man über die Ableitung:

$$\left(\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)' = -xe^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

   g hat also ihr Maximum in 0, dort ist die Funktion $\frac{1}{2}$, also liegt g zwischen 0 und $\frac{1}{2}$.
   $\Rightarrow D = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3.
   - $D = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ist abgeschlossen.
   - $g(D) \subseteq D$ nach 2.
   - g ist stetig differenzierbar.

$$\max_{x\in D}\left(|g'(x)|\right) = \max_{x\in D}\left(\left|-xe^{-x^2}\right|\right) \leq \max_{x\in D}(|x|)\max_{x\in D}\left(e^{-x^2}\right) \leq \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} = q.$$

   g ist also kontrahierend in D mit $q = \frac{1}{2}$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert die Fixpunktiteration in D für jede Wahl von x_0.

4. A priori-Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& |x_n - \overline{x}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| < 10^{-4} \\
\overset{q<1}{\Leftrightarrow}\quad & q^n < \frac{(1-q)10^{-4}}{|x_1 - x_0|} \\
\Leftrightarrow\quad & n\ln(q) < \ln\left(\frac{(1-q)10^{-4}}{|x_1 - x_0|}\right) \\
\overset{q<1,\ \ln(q)<0}{\Leftrightarrow}\quad & n > \frac{\ln\left(\frac{1-q}{10^4|x_1-x_0|}\right)}{\ln(q)}
\end{aligned}$$

   Aus 3.: $q = \frac{1}{2}$. Wähle $x_0 = 0$, dann ist $x_1 = g(0) = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{0.5}{10^4\cdot 0.5}\right)}{\ln(0.5)} \approx 13.3.$$

   Es sind also a priori 14 Schritte notwendig.

2. Aufgabe

1.

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{2}\ln(1-0.82) \approx 0.857,\\
x_2 &= -\frac{1}{2}\ln(1-0.857) \approx 0.972,\\
x_2 &= -\frac{1}{2}\ln(1-0.972) \approx 1.788.
\end{aligned}$$

Die Folgenglieder werden immer größer. Die zweite Iterierte liegt schon nicht mehr in D und die vierte Iterierte ist nicht mehr definiert, da das Argument vom ln negativ wird.

2. $|g'(x)| = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}\right| \overset{x\in[0.7,0.9]}{>} \frac{1}{2}\left|\frac{1}{1-0.7}\right| = \frac{5}{3} > 1 \quad \forall x \in D.$
Also ist g keine Kontraktion und damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes nicht erfüllt.
Alternativ: $g(0.7) \approx 0.6 \notin D$.

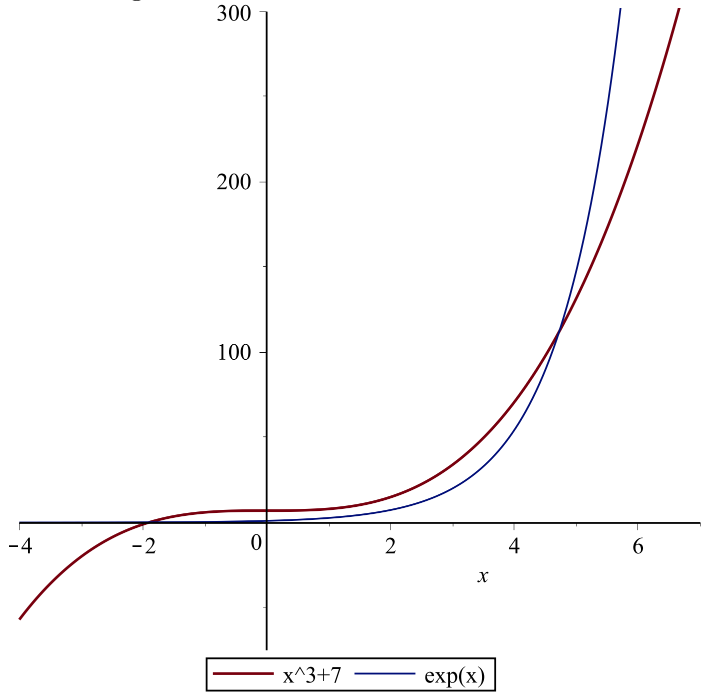
3.

$$\begin{aligned}
& g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) = x\\
\Leftrightarrow\ & \ln(1-x) = -2x\\
\Leftrightarrow\ & 1-x = e^{-2x}\\
\Leftrightarrow\ & x = 1-e^{-2x}.
\end{aligned}$$

4.
- $D = [0.7, 0.9]$ ist abgeschlossen.
- $f'(x) = 2e^{-2x} > 0\ \forall x$. f ist also streng monoton wachsend. $f(0.7) \approx 0.75 < 0.7$ und $f(0.9) \approx 0.8 < 0.9$, also ist $f(D) \subseteq D$.
- $\max_{x\in D}\left(|f'(x)|\right) = \max_{x\in D}\left(\left|2e^{-2x}\right|\right) = 2e^{-2\cdot 0.7} \approx 0.49.$
  f ist also kontrahierend mit $q = 0.5$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert die Fixpunktiteration in D für jede Wahl von x_0.

3. Aufgabe

1. Die Lösungen sind die Schnittstellen der Kurven $x^3 + 7$ und e^x.



Die Lösungen der Gleichung liegen jeweils im Intervall [-2,-1] und [4,5].

2. $f'(x) = 3x^2 - e^x$
$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 + 7 - e^{x_n}}{3x_n^2 - e^{x_n}}.$

3.
$$\begin{aligned} x_1 &\approx 4.77643, \\ x_2 &\approx 4.72250, \\ x_3 &\approx 4.71969, \\ x_4 &\approx 4.71969, \\ x_5 &\approx 4.71969. \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 &\approx 4.88280, \\ x_2 &\approx 4.81555, \\ x_3 &\approx 4.77635, \\ x_4 &\approx 4.75329, \\ x_5 &\approx 4.73965. \end{aligned}$$

Langsamere Konvergenz im Vergleich zum Newton-Verfahren.