

1. Übung zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler II
Sommersemester 2014

Abgabe: Donnerstag, 24.4.2014, vor der Vorlesung

1. Aufgabe

5+5 Punkte

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und skizzieren Sie den Graphen von f_1 .

$$1. f_1(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2} & , x \in (-\infty, -1) \\ 2 & , x = -1 \\ -x + 2 & , x \in (-1, 1) \\ 1 & , x = 1 \\ x^2 & , x \in (1, 2] \\ 2x + 3 & , x \in (2, \infty) \end{cases}, \quad 2. f_2(x) = \begin{cases} -x & , x \in (-\infty, -\pi) \\ \frac{\cos(x)-1}{x} & , x \in [-\pi, 0) \\ x^3 - 1 & , x \in [0, 1) \\ 0 & , x = 1 \\ x & , x \in (1, 2] \\ 2x - 2 & , x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (maximaler Definitionsbereich, Stetigkeit, Nullstellen, Vorzeichenintervalle, Hoch- und Tiefpunkte, Monotonieintervalle, Wendepunkte, Konvexität bzw. Konkavität, Grenzwerte bei $\pm\infty$ und den Singularitäten, Graph).

3. Aufgabe

(2+1)+(3+1+3) Punkte

1. Betrachten Sie die Funktion $f_1(x) = -\log\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$f_1^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(2-x)^k}$$

für $k \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom n -ten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

2. Betrachten Sie die Funktion $f_2(x) = \exp\left(\frac{1}{x} - 1\right)x^2$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied für $x = 2$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Restgliedes den maximalen Fehler der Taylor-Entwicklung für $f_2(2)$, indem Sie das Restglied als Funktion von ξ im Intervall $[1, 2]$ auffassen und das Maximum bestimmen.

4. Aufgabe

2+2+2+2+1+1 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Integrale

1. $\int \frac{3x^8}{x^3 + 1} dx,$

4. $\int \frac{2x + 3}{2x - 1} dx,$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) \cos^3(x) dx,$

5. $\int e^{1+\log(x)+x^2} dx,$

3. $\int_0^1 (1 + 2x)e^{-x} dx,$

6. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx.$

Hinweis: Verwenden Sie in 1. Substitution.