UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

2. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2013/2014

Abgabe: Donnerstag, 31.10.2013, bis 16:00

---

1. Aufgabe

2+2+3+3 Punkte

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind. Bestimmen Sie im Falle einer bijektiven Funktion die zughörige Umkehrfunktion und skizzieren Sie die Graphen der Funktionen (jeweils Funktion und Umkehrfunktion in ein Koordinatensystem).

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 3.$
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ p \mapsto p^4.$
3. $f_3 : [0, \infty) \to (0, 1],\ t \mapsto \frac{1}{t^2+1}.$
4. $f_4 : (-\infty, -\frac{1}{2}] \to [\frac{3}{4}, \infty),\ \xi \mapsto \xi^2 + \xi + 1.$

2. Aufgabe

5+5 Punkte

Die Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = 2x - 1 \quad , \quad h(x) = x^2 + 3x - 4.$$

Geben Sie Formeln für die Verkettungen

1. $h \circ (g \circ f)$,
2. $f \circ (h \circ g)$

an.

3. Aufgabe

10 Punkte

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $5^{2n} - 3^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar ist.

4. Aufgabe

(1+1)+(1+1)+(3+3) Punkte

1. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ bzw. des Produktzeichens $\prod$:
   a) $1 - 3 + 9 - 27 + 81$,
   b) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2010 \cdot 2012$.

2. Berechnen Sie:
   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} k^2$,
   b) $\displaystyle\prod_{m=-1}^{3} m^5$.

3. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,
   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.