UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

2. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Abgabe: Dienstag, 6.5.2014, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

2.5 + 1.5 Punkte

1. Ist die Funktion
$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
in $(0,0)$ total differenzierbar?

2. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen der Funktion
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
in $(0,0)$ existieren. Ist die Funktion dort total differenzierbar?

Hinweis: Nutzen Sie die Polarkoordinatendarstellen $(x,y) = \big(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\big)$.

2. Aufgabe

1 + 1 Punkte

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die Jacobi-Matrix:

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad x \mapsto Ax + b \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$

2. $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \sqrt{x_1^2 + x_2} \end{pmatrix}.$

3. Aufgabe

1.5 + 1.5 Punkte

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen sowohl in kartesischen Koordinaten $z = x + iy$ als auch in Polarkoordinaten $z = re^{i\phi}$ dar. Zeichnen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

1. $z_1 = (1-i)^3$,

2. $z_2 = -2\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$.

4. Aufgabe

1 + 2 Punkte

1. Zeigen Sie für das Reziproke einer komplexen Zahl $z = re^{i\phi} \neq 0$ die Darstellung

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r}e^{-i\phi}.$$

2. Berechnen Sie das Reziproke in kartesischen und in Polarkoordinaten der komplexen Zahlen
   a) $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$,
   b) $z_2 = 5e^{\frac{7}{4}\pi i}$.

5. Aufgabe

2 + 2 Punkte

Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

1. $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\}$,
2. $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}\right\}$.