UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 2. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 13.5.2014

---

1. Aufgabe

1. Stetigkeit in $(0,0)$:

$$f_1\big(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\big) = \frac{r^3\cos^3(\phi)r\sin(\phi)}{r^2} = r^2\sin(\phi)\cos^3(\phi)$$
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{r\to 0} f_1\big(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\big) = \lim_{r\to 0} r^2\sin(\phi)\cos^3(\phi) = 0 = f_1(0,0).$$

partielle Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x,0)-f_1(0,0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0,\\ \lim_{y\to 0}\frac{f_1(0,y)-f_1(0,0)}{y-0} &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.\end{aligned}$$

Also ist f_1 partiell differenzierbar in $(0,0)$.
Stetigkeit der partiellen Ableitungen in $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{x^3(x^2+y^2)-x^3y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}\big(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\big) &= \frac{r^4\cos^4(\phi)r\sin(\phi)+3r^2\cos^2(\phi)r^3\sin^3(\phi)}{r^4}\\ &= r\sin(\phi)\cos^2(\phi)\big(\cos^2(\phi)+3\sin^2(\phi)\big) \xrightarrow{r\to 0} 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0),\\ \frac{\partial f_1}{\partial y}\big(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\big) &= \frac{r^5\cos^5(\phi)-r^3\cos^3(\phi)r^2\sin(\phi)}{r^4}\\ &= r\cos^3(\phi)\big(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi)\big) \xrightarrow{r\to 0} 0 = \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0).\end{aligned}$$

Also sind die partiellen Ableitungen stetig in $(0,0)$ und damit ist f_1 total differenzierbar in $(0,0)$.

2. Existenz der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x,0)-f_2(0,0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0,\\ \lim_{y\to 0}\frac{f_2(0,y)-f_2(0,0)}{y-0} &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0.\end{aligned}$$

f_2 ist unstetig in $(0,0)$:

$$f_2\big(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\big) = \frac{r\cos(\phi)r\sin(\phi)}{r^2} = \sin(\phi)\cos(\phi).$$

Lässt man r gegen 0 auf einer Gerade $\phi \equiv$ konst. gehen mit $\sin(\phi)\cos(\phi) \neq 0$, so ergibt sich nicht $0 = f_2(0,0)$. Also existiert der Grenzwert gegen Null nicht, damit ist f_2 nicht stetig und auch nicht total differenzierbar.

2. Aufgabe

1. $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3 \\ -x_1 + 4x_3 + 1 \end{pmatrix}.$

   $J_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A.$

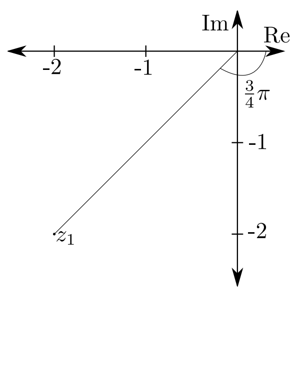
2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial x_i} &= 2(x_1 + x_2), \\
\frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2}}2x_1 = -\frac{x_2}{x1^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2}}, \\
\frac{\partial g_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2}} = \frac{x_1}{x1^2 + x_2^2} - \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2}}. \\
\Rightarrow J_g &= \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) & 2(x_1 + x_2) \\ -\frac{x_2}{x1^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2}} & \frac{x_1}{x1^2 + x_2^2} - \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

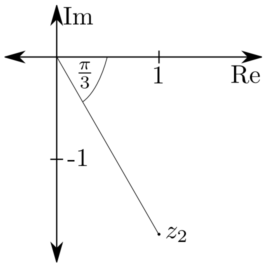
1.

$$\begin{aligned}
z_1 &= (1-i)^3 = 1 - 3i + 3i^2 - i^3 = 1 - 3 - 3i + i = -2 - 2i, \\
|z_1| &= \sqrt{4+4} = \sqrt{8}, \\
\arctan\left(\frac{-2}{-2}\right) &\overset{\mathrm{Re}(z_1)<0}{=} -\frac{3}{4}\pi, \\
z_1 &= \sqrt{8}e^{-\frac{3}{4}\pi i}.
\end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}
z_2 &= -2\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = -2\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{1-(\sqrt{3}i)^2} = -2\frac{1+2\sqrt{3}i-4}{4} = 1 - \sqrt{3}i, \\
|z_2| &= \sqrt{1+3} = 2, \\
\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) &\overset{\mathrm{Re}(z_2)>0}{=} -\frac{\pi}{3}, \\
z_2 &= 2e^{-\frac{\pi}{3}i}.
\end{aligned}$$



4. Aufgabe

1. $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{z \cdot \overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$
   $re^{i\phi} \cdot \frac{1}{r} e^{-i\phi} = 1 \cdot e^0 = 1.$
2. a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1} &= \frac{3-\sqrt{3}i}{9+3} = \frac{3-\sqrt{3}i}{12}, \\
|z_1| &= \sqrt{9+3} = \sqrt{12}, \\
\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &\overset{\mathrm{Re}(z_1)>0}{=} \frac{\pi}{3}, \\
\frac{1}{z_1} &= \frac{1}{\sqrt{12}} e^{-\frac{\pi}{3}i}.
\end{aligned}$$

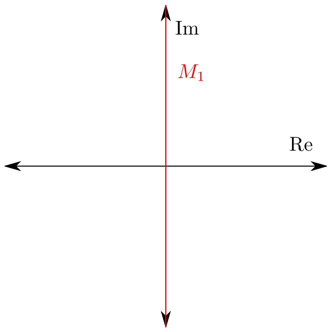
   b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_2} &= \frac{1}{5} e^{-\frac{7}{4}\pi i}, \\
\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\Rightarrow \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{5\sqrt{2}}(1+i).
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

1. Umformen der Gleichung $|z-1| = |z+1|$:

$$\begin{aligned}
& z = x + iy \\
\Rightarrow\ & |z-1| = |z+1| \\
\Leftrightarrow\ & |z-1|^2 = |z+1|^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & 4x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0
\end{aligned}$$



2. Umformen der Ungleichung $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$:

$$
\begin{aligned}
& z = x + iy \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\
\Rightarrow \quad & \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2x < x^2 + y^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 < x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 < (x-1)^2 + y^2.
\end{aligned}
$$