UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

3. Übung zur Vorlesung

Integralgleichungen und Randelemente

Wintersemester 2016-2017

---

1. Aufgabe

4 Punkte (vereinfachte Version des Spursatzes)

Zeigen Sie, dass für $s > 1/2$ jede Funktion $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ eine Spur

$$\gamma_0 u \in H^{s-1/2}(\Gamma) \text{ auf der Hyperebene } \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\} \text{ besitzt.}$$

Zeigen Sie auch, dass der Spuroperator $\gamma_0 : H^s(\mathbb{R}^d) \to H^{s-1/2}(\Gamma)$ surjektiv ist.
Hinweise:

1. Die Existenz ist gesichert, wenn eine Konstante C existiert mit

$$\|v|_\Gamma\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \text{ für alle } v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ (Schwartz Raum).}$$

   Sei $\xi = (\xi', \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, wobei $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ und $x_d \in \mathbb{R}$.

   (a) Für die $(d-1)$-dimensionale Fourier Transformation der Funktion $w = v|_\Gamma$ gilt

$$\mathcal{F}w(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}v(\xi', \xi_d) \mathrm{d}\xi_d \text{ für alle } \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

   (b) Multiplizieren und dividieren Sie $\mathcal{F}v(\xi', \xi_d)$ oben mit $(1+|\xi|^2)^s$ und leiten Sie eine Abschätzung für $|\mathcal{F}w(\xi')|^2$ her. Hier ist die Variabelsubstitution $\xi_d = t\sqrt{1+|\xi'|^2}$ nutzbar.

   (c) Integrieren Sie diese Abschätzung mit dem Gewicht $(1+|\xi'|^2)^{s-1/2}$ über $\mathbb{R}^{d-1}$.

2. Für die Surjektivitat betrachten Sie die Funktion u mit

$$\mathcal{F}u(\xi', \xi_d) = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi'|^2}} \varphi\left(\frac{\xi_d}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\right) \mathcal{F}w(\xi'),$$

   mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $\int \varphi = 1$.

2. Aufgabe

4 Punkte (verallgemeinerte Konormalenableitung)

Analog zu dem Beweis aus der Vorlesung, zeigen Sie, dass für ein $u \in H^1(\Omega)$ und $f \in H^1(\Omega)^*$ mit

$$Lu = f \text{ in } \mathcal{D}^*(\Omega),$$

ein $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ existiert, sodass

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle + \langle g, \gamma_0 v \rangle \text{ für alle } v \in H^1(\Omega) \text{ gilt.}$$

Zeigen Sie auch, dass g nur von u und f abhängig ist und dass

$$\|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C\left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{H^1(\Omega)^*}\right)$$

gilt.

3. Aufgabe

4 Punkte

Betrachten Sie die Funktion

$$F(y) = -\int_{S^2} \frac{1}{\pi} \frac{n(x)^\top (x-y)}{|x-y|^2} \left(\frac{n(x)^\top (x-y)}{|x-y|^2} - 1 \right) \mathrm{d}S_x,$$

wobei S^2 die Oberfläche des Einheitsballs in $\mathbb{R}^3$ bezeichne. Werten Sie diese Funktion für $y \in S^2$ und für $y \in \mathbb{R}^3 \setminus S^2$ aus.