UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 3. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 20.5.2014

---

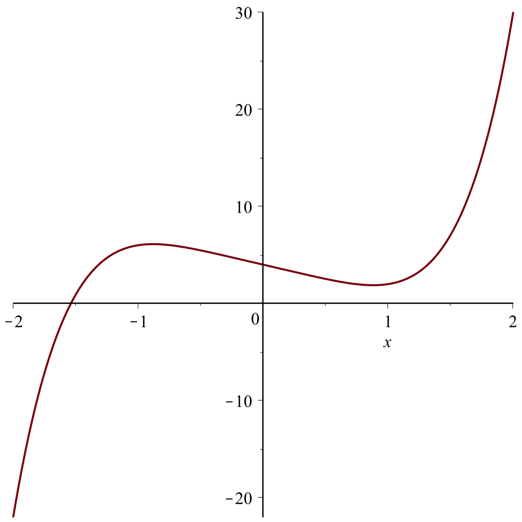
1. Aufgabe

1. f ist stetig differenzierbar, $f'(x) = 5x^4 - 3 \neq 0$ für $x \neq \sqrt[4]{\frac{3}{5}}$ und die Nullstelle $\overline{x} \neq \sqrt[4]{\frac{3}{5}}$ (einsetzen in f), deshalb ist $f'(\overline{x}) \neq 0$. Das Newton-Verfahren konvergiert also für x_0 hinreichend nahe an $\overline{x}$.
   f ist sogar zweimal stetig differenzierbar, man kann also quadratische Konvergenz erwarten.

2. $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^5 - 3x_k + 4}{5x_k^4 - 3}$.

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 1.333, \\ x_2 &\approx 1.004, \\ x_3 &\approx 0.039, \\ x_4 &\approx 1.333, \\ x_5 &\approx 1.004, \\ x_6 &\approx 0.039. \end{aligned}$$

   Die Iteration springt zwischen 1.333, 1.004 und 0.039 hin und her und ist damit nicht konvergent.

3. 

   Der Startwert $x_0 = 0$ liegt nicht hinreichend nahe bei $\overline{x}$.

2. Aufgabe

1. $(x, y)^\top$ ist Schnittpunkt von M_1 und M_2, wenn gilt

$$\begin{aligned} x^2 + 6y^2 - 16 &= 0, \\ xy + x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

$(x, y)^\top$ entspricht also den Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + 6y^2 - 16 \\ xy + x - 2 \end{pmatrix}.$$

2. Newton-Verfahren zur Lösung von $f(x, y) = 0$: Für $n = 0, 1, \cdots$ löse Gleichungssystem

$$J_f(x_n)\Delta x = -f(x_n)$$

und setze $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$ mit

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 2x & 12y \\ y + 1 & x \end{pmatrix}$$

3. 1. Schritt:

$$f(x_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad J_f(x_0) = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Löse das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -12 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -12 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Also ist

$$\Delta x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und damit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Schritt:

$$f(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J_f(x_1) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Löse das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -6 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -6 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -70 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 0 & -\frac{48}{35} \\ 0 & 1 & \frac{3}{140} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{35} \\ 0 & 1 & \frac{3}{140} \end{array}\right)$$

Also ist

$$\Delta x_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{140} \\ -\frac{6}{35} \end{pmatrix}$$

und damit

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{6}{35} \\ \frac{3}{140} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{134}{35} \\ -\frac{67}{140} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.83 \\ -0.48 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

Setze

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Y' &= \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \frac{1}{3}\left(\sin(t) - t^3 + e^t y'' - 2t^2 y' + 4\cos(t) y\right) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3}\cos(t) & -\frac{2}{3}t^2 & \frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}}_{=A(t)} Y + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}\big(\sin(t) - t^3\big) \end{pmatrix}}_{=b(t)}, \\ Y(0) &= \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Aufgabe

Ist f auf D stetig und genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. y, dann besitzt das Anfangswertproblem $y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$ genau eine Lösung.

1. $f(t,y) = \sin(1+t)\sqrt{1+y(t)}$
   f ist stetig als Komposition stetiger Funktionen.
   Zeige: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| < L|y_1 - y_2|, L > 0$:

$$\begin{aligned} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= \left|\sin(1+t)\sqrt{1+y_1} - \sin(1+t)\sqrt{1+y_2}\right| \\ &= |\sin(1+t)| \left|\sqrt{1+y_1} - \sqrt{1+y_2}\right| \\ &= |\sin(1+t)| \frac{|1+y_1-1-y_2|}{\sqrt{1+y_1}+\sqrt{1+y_2}} = \frac{|\sin(1+t)|}{\sqrt{1+y_1}+\sqrt{1+y_2}}|y_1 - y_2| \\ &\overset{y_1,y_2\in[0,1]}{\leq} \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}|y_1-y_2| = \frac{1}{2}|y_1-y_2| = L|y_1-y_2|. \end{aligned}$$

   Damit genügt f in D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. y. Also besitzt das Anfangswertproblem in D eine eindeutige Lösung.

2. Zu zeigen: Die Funktion $h(y) = y^{\frac{2}{3}}$ genügt keiner lokalen Lipschitz-Bedingung. Betrachte dazu h auf $[0,\alpha], \alpha \in \mathbb{R}_+$
   Annahme: Es existiert eine Konstante $L > 0$ mit $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| < L|y_1 - y_2|$. Da $y_2 = 0 \in [0,\alpha], h(0) = 0$, gilt dann insbesondere

$$\begin{aligned} & |h(y_1) - 0| < L|y_1 - 0| \\ \Leftrightarrow\quad & y_1^{\frac{2}{3}} < L y_1 \\ \overset{y_1\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & L > y_1^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

   Für $y_1 \to 0$ gilt $L > y_1^{-\frac{1}{3}} \to \infty$. Also ist $f(t,y) = y^{\frac{2}{3}}$ nicht lokal Lipschitz-stetig bzgl. y und damit ist die Lösung des Anfangswertproblems nicht eindeutig.