UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

4. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2013/2014

Abgabe: Freitag, 15.11.2013, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

6+4 Punkte

1. Zeigen Sie, dass der natürliche Logarithmus die Funktionalgleichung
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad , \quad x, y \in (0, \infty)$$
erfüllt. Folgern Sie hieraus eine Formel zur Berechnung von $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ für $x, y \in (0, \infty)$.
2. Sei nun $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Gelten entsprechende Funktionalgleichungen auch für den Logarithmus zur Basis a? Beweisen Sie Ihre Aussage bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel.

2. Aufgabe

5+5 Punkte

Seien $a, b, x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ und $y \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie
   a) $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$,
   b) $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.
2. Berechnen Sie
   a) $a^{\log_b(x) \log_a(b)}$,
   b) $\log_a(x) \log_x(a)$.

3. Aufgabe

3+(2+2)+3 Punkte

1. Zeigen Sie, dass $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Wieso gilt diese Formel nicht für alle $x \in \mathbb{R}$?
2. Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Identitäten
   a) $\cos\big(\arctan(x)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
   b) $\sin\big(\arctan(x)\big) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Bekanntlich gilt $\cos\big(\arccos(x)\big) = x$ für alle $x \in [-1, 1]$. Gilt auch $\arccos\big(\cos(x)\big) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Beweisen Sie Ihre Aussage bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel.

4. Aufgabe

1+1+2+2+2+2 Punkte

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

1. $x_1 = (4 + 2i) - (3 - 4i)$,
2. $x_2 = (2 + i)(4 + 3i)$,
3. $x_3 = \overline{(\sqrt{2} + 2i)}(1 + 3i)^2$,
4. $x_4 = i^n, \text{ wobei } n \in \mathbb{Z}$,
5. $x_5 = \dfrac{1 - i}{1 + i}$,
6. $x_6 = \dfrac{(2 + 4i)(1 - i)^2}{\sqrt{2} - i}$.