UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

4. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Abgabe: Dienstag, 20.5.2014, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

1.5 + 1.5 Punkte

Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, d. h. für $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ sei $(x,y) \mapsto \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ total differenzierbar.

1. Die Wirtinger-Ableitungen von f sind definiert als

$$\begin{aligned} \partial f &= \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \overline{\partial} f &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass f genau dann in einem Punkt komplex differenzierbar ist, wenn dort $\overline{\partial} f = 0$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass, falls f holomorph ist, die Funktionen u und v harmonisch sind, d. h.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \Delta v.$$

   Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen brauchen Sie nicht zu zeigen.

2. Aufgabe

4 Punkte

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(re^{i\varphi}) = g(r,\varphi) + ih(r,\varphi)$. Zeigen Sie, dass f in $z = re^{i\varphi}$ genau dann komplex differenzierbar ist, wenn die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} r\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \\ r\frac{\partial h}{\partial r} &= -\frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

3. Aufgabe

1 + 1 Punkte

1. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

2. Für welche holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\overline{f}$, also $z \mapsto \overline{f(z)}$, ebenfalls holomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe

3 Punkte

Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $\mathrm{Re}\big(f(x+iy)\big) = x^2 + 2axy + by^2$. Bestimmen Sie den Imaginärteil abhängig von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f holomorph ist.

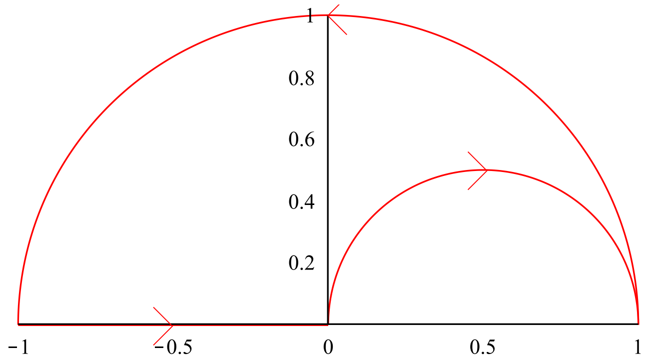
5. Aufgabe

1 + 1.5 + 1.5 Punkte

1. Skizzieren Sie die folgende Kurve

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto \cos(3t)e^{it}.$$

2. Parametrisieren Sie die in der folgenden Skizze dargestellte Kurve, beginnend bei $z = 0$.



3. Bestimmen Sie für die Kurve in 2. den Wert des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \,\mathrm{d}z.$$

Hinweis: Es gilt

$$\int_0^1 \frac{1 - \frac{1}{2}\cos(\pi t)}{\frac{5}{4} - \cos(\pi t)} \,\mathrm{d}t = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\sin(\pi t)}{\frac{5}{4} - \cos(\pi t)} \,\mathrm{d}t = \frac{\ln(3)}{\pi}.$$