UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

4. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2016-2017

Abgabe: Freitag, 25.11.2016, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

2+2+2+2=8 Punkte
Es ist

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Was ist die größtmögliche Definitionsmenge der Funktionen cosh und sinh?
Skizzieren Sie die Grahpen und zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\sinh(x), \\ (\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 &= 1 \end{aligned}$$

für alle x, y aus dem Definitionsbereich gilt.

2. Aufgabe

2+3+3=8 Punkte
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

(a) $(\mathbf{i}+4)+(7-3\mathbf{i}), \quad (1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i}), \quad (\sqrt{2}-\mathbf{i})(1+\mathbf{i})^2,$

(b) $\mathbf{i}^2, \quad \mathbf{i}^{22}, \quad \mathbf{i}^3, \quad \mathbf{i}^{33}, \quad \frac{1}{\mathbf{i}},$

(c) $\frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}, \quad \frac{3-5\mathbf{i}}{5-3\mathbf{i}}, \quad \frac{(2+\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})(1+2\mathbf{i})}{(1-\mathbf{i})^2}.$

3. Aufgabe

3+2+3=8 Punkte

(a) Seien $z_1 = 5e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$ und $z_2 = 3e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$. Bestimmen Sie $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$, $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in Polarkoordinatendarstellung, d.h in der Form $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(b) Welche der folgenden komplexen Zahlen sind identisch, welche sind verschieden voneinander?
$z_1 = 2e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = -2e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}, \quad z_3 = -2e^{-\mathbf{i}\frac{5\pi}{3}}, \quad z_4 = 2e^{\mathbf{i}\frac{5\pi}{3}}.$

(c) Seien $u, v, w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Größen und ergänzen Sie diese in folgender Tabelle:

	Argument	Betrag	Realteil	Imaginärteil
u	$\frac{7\pi}{6}$	$\sqrt{12}$		
v	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{3}$		
w			2	2
z			$-\sqrt{3}$	1
uv				
$\frac{u}{v}$				
w^4				

4. Aufgabe

1+1+3+3=8 Punkte

Nutzen Sie die Rechenregeln für komplexe Exponenten

- für alle $a,\, b \in \mathbb{C}$ gilt $e^a e^b = e^{a+b}$,
- für alle $a \in \mathbb{C},\, m \in \mathbb{Z}$ gilt $(e^a)^m = e^{ma}$,

und die Eulersche Formel $e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$, um die folgenden Relationen für $\varphi,\, \psi \in \mathbb{R}$ zu beweisen

(a) $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\,\cos\varphi$,

(b) $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi$,

(c) $\sin(3\varphi) = 3(\cos\varphi)^2\sin\varphi - (\sin\varphi)^3$,

(d) $\cos(4\varphi) = (\cos\varphi)^4 + (\sin\varphi)^4 - 6(\cos\varphi)^2\,(\sin\varphi)^2$.