UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

4. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2014

Abgabe: Donnerstag, 15.5.2014

---

1. Aufgabe

4+6+2+1+7 Punkte

Die *Orthogonalprojektion* eines Punktes auf eine Gerade bzw. Ebene bildet den Punkt auf einen Punkt auf der Geraden bzw. Ebene ab, sodass die Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten senkrecht auf der Gerade bzw. Ebene steht.

1. Leiten Sie aus den Bedingungen
   a) der Verbindungsvektor zwischen dem Punkt $\mathbf{p}$ und seiner Projektion $\mathbf{q}$ steht senkrecht auf der Geraden $g = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\}$: $(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} = 0$,
   b) die Projektion ist ein Element der Gerade: $\mathbf{q} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ für ein $t \in \mathbb{R}$,

   die Darstellung der Projektionsabbildung $P_g(\mathbf{p})$ für allgemeine Geraden her.
2. Leiten Sie analog die Projektionsabbildung $P_E(\mathbf{p})$ für Ebenen $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ her.
3. Berechnen Sie $P_g\big(P_g(\mathbf{p})\big)$.
4. Wie kann man aus der Projektion den Abstand eines Punktes zu einer Geraden bzw. Ebene berechnen?
5. Wie kann man den Abstand zweier Geraden, einer Gerade zu einer Ebene, zweier Ebenen berechnen?

2. Aufgabe

20 Punkte

Betrachten Sie die Punkte, Geraden und Ebenen

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad g_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad ,$$

$$g_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad ,$$

$$E_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad ,$$

$$E_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Berechnen Sie alle Abstände.