UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

5. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2013/2014

Abgabe: Freitag, 22.11.2013, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

2+2+3+3 Punkte

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

1. $A = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 3\} \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| \geq 2\}$.
2. $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z + 2 + i| \leq 2\}$.
3. $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z + 1| \leq 1 \text{ und } \operatorname{Im}(\overline{z}) \leq 0\}$.
4. $D = \{z \in \mathbb{C};\ z = u^2 \text{ für ein } u \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(u) \geq 0 \text{ und } \operatorname{Im}(u) \geq 0\}$.

2. Aufgabe

3+2+(1+1+1)+2 Punkte

1. Berechnen Sie den Betrag und das Argument von $z = \sqrt{3} - 3i$. Folgern Sie die Darstellung von z in Polarkoordinaten und skizzieren Sie z in der komplexen Zahlenebene. Berechnen Sie anschließend z^4.
2. Bestimmen Sie alle (komplexen) Lösungen der folgenden Gleichungen und geben Sie sie in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:
   a) $z^2 - 2iz + 8 = 0$,
   b) $z^2 + (1 - i)z - i = 0$,
   c) $z^3 = i$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Schatzsucher machen sich auf einer Insel auf die Suche nach einem vergrabenen Schatz. Sie haben eine alte Lagebeschreibung ausfindig gemacht, die lautet:
"Gehe vom Galgen direkt zur Palme, dann gleich viele Schritte im rechten Winkel nach links und stecke dort die erste Fahne in den Boden. Gehe nun vom Galgen zum Felsen, dann im rechten Winkel genauso weit nach rechts und stecke die zweite Fahne in den Boden. Dann liegt der Schatz genau in der Mitte zwischen den beiden Fahnen."
Zwar sind Palme und Felsen noch vorhanden, aber der Galgen ist längst verrottet. Notgedrungen raten die Schatzsucher die Position des Galgens und folgen dann der Lagebeschreibung. Tatsächlich stoßen sie sofort auf den Schatz. Ist das glücklicher Zufall?
Hinweis: Fassen Sie alle Punkte (Galgen, Palme, Felsen, Fahnen und Schatz) als komplexe Zahlen auf und berechnen Sie den Schatzort. Multiplikation einer komplexen Zahl mit i bewirkt eine Drehung um 90° linksherum, Multiplikation mit $-i$ bewirkt eine Drehung um 90° rechtsherum.

4. Aufgabe

4+6 Punkte

Finden Sie jeweils ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N(\epsilon)$, falls

1. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
2. $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.