UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 5. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 5.6.2014

---

1. Aufgabe

1. $y'(t) = -\sin(t)e^{\cos(t)} = -y(t)\sin(t)$ und $y(0) = e^{\cos(0)} = e^1 = e$. y löst also das Anfangswertproblem.

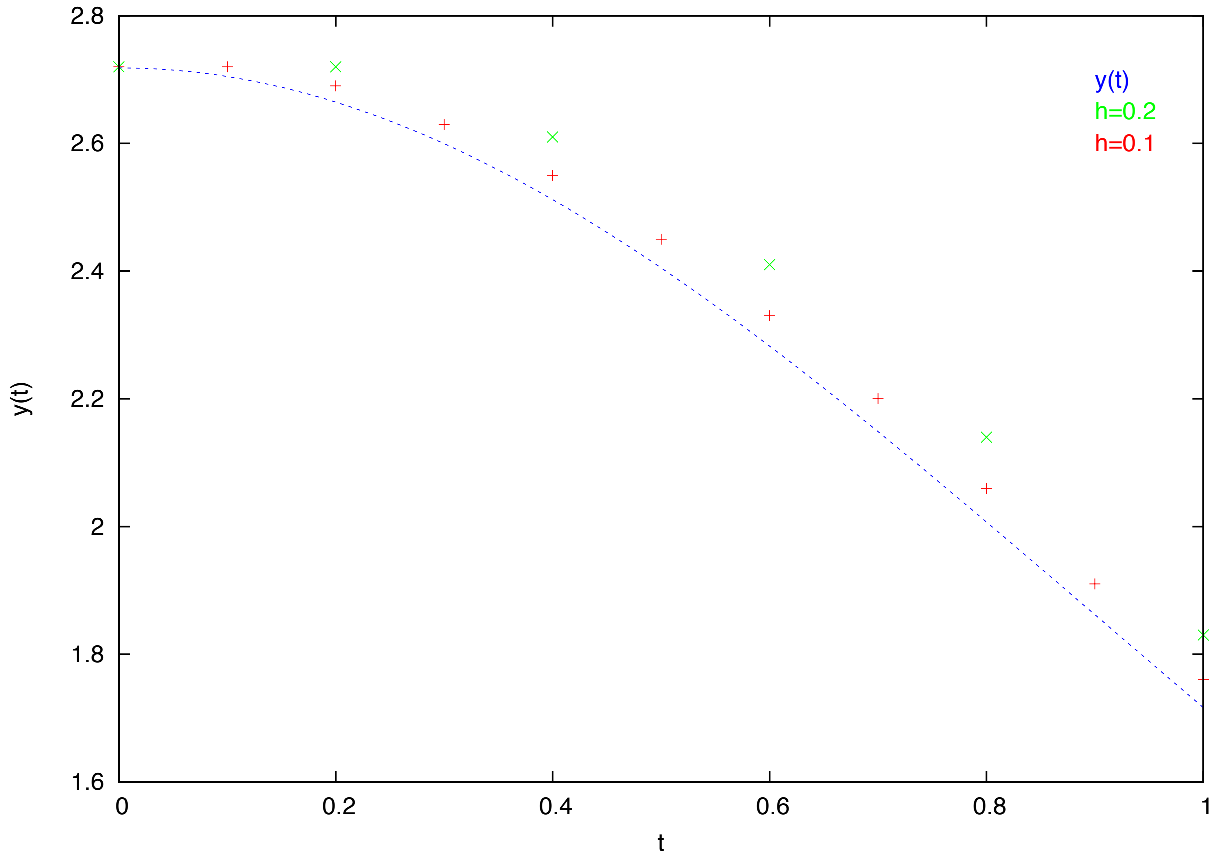
2. $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$, $f(t_k, y_k) = -y_k \sin(t_k)$, also:

$$y_{k+1} = y_k\big(1 - h\sin(hk)\big).$$

Wertetabelle:

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$y(t)$	2.72	2.70	2.66	2.60	2.51	2.41	2.28	2.15	2.01	1.86	1.72
$h = 0.2$	2.72		2.72		2.61		2.41		2.14		1.83
$h = 0.1$	2.72	2.72	2.69	2.63	2.55	2.45	2.33	2.20	2.06	1.91	1.76

Je feiner die Schrittweite, desto besser die Näherung.

3. 

2. Aufgabe

1. $h_k = 0.05,\ f(t_k, y_k) = -100y_k$, also

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + 0.05 \cdot (-100y_k) = -4y_k. \\ y_0 &= y(0) = 1, \\ y_1 &= -4y_0 = -4, \\ y_2 &= -4y_1 = 16, \\ y_3 &= -4y_2 = -64, \\ y_4 &= -4y_3 = 256. \end{aligned}$$

2. $h_k = 0.05,\ f(t_{k+1}, y_{k+1}) = -100y_{k+1}$, also

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + 0.05 \cdot (-100)y_{k+1} \\ \Leftrightarrow y_{k+1} &= \frac{1}{6}y_k. \\ y_0 &= y(0) = 1, \\ y_1 &= \frac{1}{6}y_0 \approx 0.167, \\ y_2 &= \frac{1}{6}y_1 \approx 0.028, \\ y_3 &= \frac{1}{6}y_2 \approx 0.005, \\ y_4 &= \frac{1}{6}y_3 \approx 0.0007. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} y(0.05) &\approx 0.007, \\ y(0.1) &\approx 4.5 \cdot 10^{-5}, \\ y(0.15) &\approx 3.1 \cdot 10^{-7}, \\ y(0.2) &\approx 2.1 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Das explizite Euler-Verfahren oszilliert stark und die Näherungen liegen weit entfernt von der exakten Lösung. Das implizite Euler-Verfahren liefert wesentlich bessere Ergebnisse.

3. Aufgabe

1. $Y = (y, y')^\top$:

$$\begin{aligned} Y' &= \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ t + y - \frac{2}{1+t}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{1+t} \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = f(t, Y), \\ Y(0) &= \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Y_{\text{hilf}} &= Y_0 + \frac{1}{2}f(0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ Y_1 &= Y_0 + f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ Y_{\text{hilf}} &= Y_1 + \frac{1}{2}f(1, y_1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 23 \\ 20 \end{pmatrix}, \\ Y_2 &= Y_1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 38 \\ 35 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Näherung für $y(1) \approx \frac{3}{2}$, für $y(2) \approx \frac{19}{6}$.