UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

6. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2013/2014

Abgabe: Freitag, 29.11.2013, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

4+6 Punkte

Sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass im Fall $x \neq 1$ die Formel
$$q_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$
für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ erfüllt ist.
2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$? Berechnen Sie in diesen Fällen $\lim_{n \to \infty} q_n$.

2. Aufgabe

3+4+3 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{13n^4 - 2n^2 - 12n + 7}{-\frac{1}{3}n^5 + 8n}$,
2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{9n^3 + 2n^2 + \frac{4}{n}}{n^3 + 4n^2 + n - 3}$,
3. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^8 + n^6 + n}{n^7 + 4n^2}$.

3. Aufgabe

4+(3+3) Punkte

1. Sei $a_n = \big((-1)^{n+1}(-1)^n\big) + (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, aber nicht konvergent ist.

2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+n+1} - 2n)$,
   Hinweis: Erweitern Sie mit $\sqrt{4n^2+n+1} + 2n$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)$.
   Hinweis: Benutzen Sie $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

4. Aufgabe

10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Folge

$$\left(\sqrt[n]{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Benutzen Sie das Einschließungskriterium und die Monotonie von $\sqrt[n]{\cdot}$.