UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

6. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Abgabe: Dienstag, 3.6.2014, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

1 + 2 + 2 + 2 +1 Punkte

1. Weisen Sie die Produktregel für die Wirtinger-Ableitungen nach.
2. Zeigen Sie für die Funktionen $M_1(z) = z$ und $\overline{M}_1(z) = \overline{z}$:
$$\begin{aligned} \partial M_1(z) &= \overline{\partial}\,\overline{M}_1(z) = 1, \\ \partial \overline{M}_1(z) &= \overline{\partial} M_1(z) = 0. \end{aligned}$$
3. Beweisen Sie induktiv für die Monome $M_n(z) = z^n$ und $\overline{M}_n(z) = \overline{z}^n$ $(n \geq 0)$:
$$\begin{aligned} \partial M_n(z) &= n z^{n-1}, \\ \partial \overline{M}_n(z) &= \overline{\partial} M_n(z) = 0, \\ \overline{\partial}\,\overline{M}_n(z) &= n \overline{z}^{n-1}. \end{aligned}$$
4. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $f(z) = z^3 \overline{z} + \frac{1}{4} \overline{z}^4$ komplex differenzierbar?
5. Gibt es eine offene Menge, auf der f holomorph ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe

1.5 + 1 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a| > b > 0$. Zeigen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

in folgenden Schritten:

1. Zeigen Sie

   $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{bi} \int_{K(0,1)} \frac{1}{z^2 + \frac{2a}{b}z + 1}\,\mathrm{d}x.$$

   Hinweis: Fassen Sie die linke Seite als Wegintegral mit $\gamma(x) = e^{ix}$ auf.

2. Zeigen Sie:

   $$z^2 + \frac{2a}{b}z + 1 = \left(z - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}\right)\left(z + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}\right).$$

3. Zeigen Sie mit Partialbruchzerlegung:

   $$\frac{1}{z^2 + \frac{2a}{b}z + 1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}}{z - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}}{z + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}}.$$

4. Zeigen Sie:

   $$\begin{aligned} \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} - \frac{a}{b}\right| &< 1 \quad , \quad \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}\right| > 1 \quad , \quad \text{falls } a > 0, \\ \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} - \frac{a}{b}\right| &> 1 \quad , \quad \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}\right| < 1 \quad , \quad \text{falls } a < 0. \end{aligned}$$

5. Zeigen Sie mit dem Cauchy-Integralsatz und dem Zentrierungslemma:

   $$\int_{K[0,1]} \frac{1}{z - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}}\,\mathrm{d}z - \int_{K[0,1]} \frac{1}{z + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{sgn}(a).$$

6. Folgern Sie die ursprüngliche Behauptung.

Hinweis: Resultate einer nicht bearbeiteten Teilaufgabe dürfen in den darauf folgenden Teilen verwendet werden.