UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Lösung zur 6. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 12.6.2014

---

1. Aufgabe

1. $\partial f = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad , \quad \overline{\partial} f = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$

$$\begin{aligned} 2\partial(fg) &= (fg)_x - i(fg)_y = f_x g + f g_x - if_y g - ifg_y = (f_x - if_y)g + f(g_x - ig_y) \\ &= 2(\partial f g + f\partial g), \\ 2\overline{\partial}(fg) &= (fg)_x + i(fg)_y = f_x g + f g_x + if_y g + ifg_y = (f_x + if_y)g + f(g_x + ig_y) \\ &= 2(\overline{\partial} f g + f\overline{\partial} g). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & M_1(x+iy) = x+iy \\ \Rightarrow\ & (M_1)_x = 1, \\ & (M_1)_y = i \\ \Rightarrow\ & \partial M_1(z) = \frac{1}{2}(1 - i\cdot i) = 1, \\ & \overline{\partial} M_1(z) = \frac{1}{2}(1 + i\cdot i) = 0. \\ & \overline{M}_1(x+iy) = x - iy \\ \Rightarrow\ & \left(\overline{M}_1\right)_x = 1, \\ & \left(\overline{M}_1\right)_y = -i \\ \Rightarrow\ & \partial \overline{M}_1(z) = \frac{1}{2}\big(1 - i(-i)\big) = 0, \\ & \overline{\partial}\,\overline{M}_1(z) = \frac{1}{2}\big(1 + i(-i)\big) = 1. \end{aligned}$$

3. IA $n=0$: $M_0 = \overline{M}_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \partial M_0 = \overline{\partial} M_0 = \partial \overline{M}_0 = \overline{\partial}\,\overline{M}_0 = 0.$
   IV: Behauptung sei gezeigt für $n \in \mathbb{N}$.
   IS: $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \partial M_{n+1}(z) &= \partial(M_1 M_n)(z) \overset{1.}{=} \partial M_1(z) M_n(z) + M_1(z)\partial M_n(z) \overset{2.,\mathrm{IV}}{=} 1\cdot z^n + z\cdot n z^{n-1} \\ &= (n+1)z^n, \\ \overline{\partial} M_{n+1}(z) &= \overline{\partial} M_1(z) M_n(z) + M_1(z)\overline{\partial} M_n(z) \overset{2.,\mathrm{IV}}{=} 0, \\ \partial \overline{M}_{n+1}(z) &= \partial \overline{M}_1(z)\overline{M}_n(z) + \overline{M}_1(z)\partial\overline{M}_n(z) \overset{2.,\mathrm{IV}}{=} 0, \\ \overline{\partial}\,\overline{M}_{n+1}(z) &= \overline{\partial}\,\overline{M}_1(z)\overline{M}_n(z) + \overline{M}_1(z)\overline{\partial}\,\overline{M}_n(z) \overset{2.,\mathrm{IV}}{=} 1\cdot \overline{z}^n + \overline{z}\cdot n\overline{z}^{n-1} = (n+1)\overline{z}^n. \end{aligned}$$

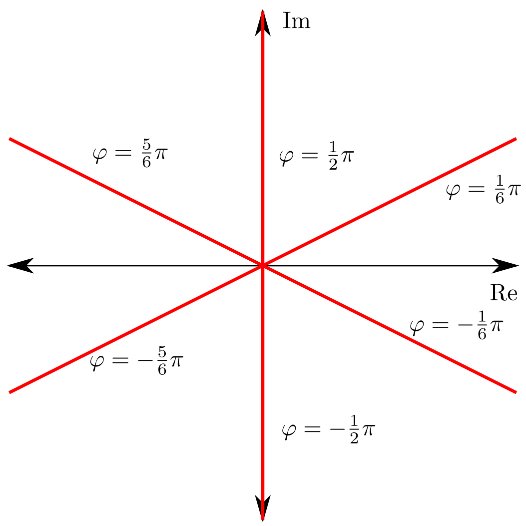
4. f in z komplex differenzierbar $\Leftrightarrow \overline{\partial} f(z) = 0$. Nach 3. folgt

$$\overline{\partial} f(z) = 0 \cdot \overline{z} + z^3 \cdot 1 + \overline{z}^3 = z^3 + \overline{z}^3 = 0.$$

Mit $z = re^{i\varphi}$ folgt

$$\begin{aligned} & r^3 e^{3i\varphi} + r^3 e^{-3i\varphi} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{3i\varphi} + e^{-3i\varphi} = 0 \quad \vee \quad r = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(3\varphi) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \varphi \in \left\{ -\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi \right\}. \end{aligned}$$

5. Die Punkte, in denen f komplex differenzierbar ist, liegen auf einer endlichen Vereinigung von Geraden durch den Ursprung:



Sie enthält keine offene Menge. Damit gibt es keine offene Menge, auf der f holomorph ist.

2. Aufgabe

1.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(x) &= ie^{ix} = i\gamma(x), \\ \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(\gamma(x) + \frac{1}{\gamma(x)}\right) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(x)} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{b}{2}\left(\gamma(x) + \frac{1}{\gamma(x)}\right)} \cdot \frac{\dot{\gamma}(x)}{i\gamma(x)} \, \mathrm{d}x \\ &\overset{\gamma([0,2\pi]=K(0,1)}{=} \int_{K(0,1)} \frac{1}{a + \frac{b}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{bi} \int_{K(0,1)} \frac{1}{z^2 + \frac{2a}{b} z + 1} \, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

2. Für Linearfaktorzerlegung Nullstellen bestimmen:

$$\begin{aligned} & z^2 + \frac{2a}{b} z + 1 = 0 \qquad (1) \\ \Leftrightarrow \quad & \left(z + \frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & z = \pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} - \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

3. Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(z - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right)\left(z + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right)} &= \frac{A}{z - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}} + \frac{B}{z + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}} \\ &= \frac{A\left(z + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right) + B\left(z - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right)}{\left(z - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right)\left(z + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right)} \\ &= \frac{z(A+B) + A\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right) + B\left(-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right)}{\left(z - \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right)\left(z + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1} + \frac{a}{b}\right)} \end{aligned}$$

Daraus folgt $B = -A$ und

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}}$$

und damit die Behauptung.

4. $a > 0$:

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}\right| &= \underbrace{\left|\frac{a}{b}\right|}_{>1} \underbrace{\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 1\right)}_{>1} > 1, \\ \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} - \frac{|a|}{b}\right| \end{aligned}$$

$a < 0$:

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{a}{b}\right| &= \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} - \frac{|a|}{b}\right|, \\ \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \frac{|a|}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 1\right) > 1 \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}-\frac{|a|}{b}\right|<1.\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{a^2}{b^2}-1-2\frac{|a|}{b}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{a^2}{b^2}<1\\
\Leftrightarrow\quad &2\frac{a^2}{b^2}-2\frac{|a|}{b}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}<2\\
\Leftrightarrow\quad &1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<\frac{b^2}{a^2}\\
\Leftrightarrow\quad &1-\frac{b^2}{a^2}<\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\\
\Leftrightarrow\quad &\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1.
\end{aligned}
$$

Dies ist wahr für alle $0<b\leq|a|$. Damit folgt die Behauptung.

5. Für $z^*\notin\overline{D(0,1)}$ gilt nach dem Cauchy-Integralsatz:

$$\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z-z^*}\,\mathrm{d}z=0,$$

da $z\mapsto\frac{1}{z-z^*}$ holomorph auf $D(0,1+\delta)$ für $0<\delta<|z^*|-1$ und $K(0,1)\subset D(0,1+\delta)$.
Für $z^*\in D(0,1)$ gibt es $\epsilon>0$ mit $D(z^*,\epsilon)\subset D(0,1)$. Mit dem Zentrierungslemma ($R=1+\delta$ für ein $\delta>0$) folgt

$$\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z-z^*}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{K(z^*,\epsilon)}\frac{1}{z-z^*}\,\mathrm{d}z=2\pi i.$$

Je nach Vorzeichen von a ist eine der beiden Nullstellen von (1) in $D(0,1)$ und die andere nicht in $\overline{D(0,1)}$. Für δ hinreichend klein ($\delta<|\text{Nullstellen}|-1$) folgt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{a}{b}}\,\mathrm{d}z &= \begin{cases}2\pi i &, a>0\\ 0 &, a<0\end{cases},\\
\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{a}{b}}\,\mathrm{d}z &= \begin{cases}0 &, a>0\\ 2\pi i &, a<0\end{cases}
\end{aligned}
$$

und somit

$$\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{a}{b}}\,\mathrm{d}z-\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{a}{b}}\,\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i &, a>0\\ -2\pi i &, a<0\end{cases}=2\pi i\operatorname{sgn}(a).$$

6. Insgesamt gilt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos(x)}\,\mathrm{d}x &\overset{1.}{=} \frac{2}{bi}\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z^2+\frac{2a}{b}z+1}\,\mathrm{d}z\\
&\overset{2.,3.}{=} \frac{2}{bi}\frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}\left(\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{a}{b}}\,\mathrm{d}z-\int\limits_{K(0,1)}\frac{1}{z+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}+\frac{a}{b}}\,\mathrm{d}z\right)\\
&\overset{4.,5}{=} \frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2}}\cdot 2\pi i\operatorname{sgn}(a)=\frac{2\pi\operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2-b^2}}
\end{aligned}
$$