UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

6. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2016-2017

Abgabe: Freitag, 9.12.2016, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

2+2+2+2=8 Punkte

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben unbeschränkte Folge mit $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie Beispiele der Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die gilt:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$,

(iii) die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt,

(iv) die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten unbeschränkt und nach oben beschränkt.

2. Aufgabe

2+2+2+2+2+2+2=14 Punkte

Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der nachstehenden Folgen, falls sie existieren.

(i) $\left(\dfrac{7n^4 - 8n^3 - 1}{2n^4 - n^2 + 500}\right)_{n\geq 1}$,

(ii) $\left(\dfrac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n}+5}\right)_{n\geq 1}$,

(iii) $\left(\sqrt{\dfrac{8n^3 + 4n^2 + 2n + 1}{30n^2 + 15n + 2}}\right)_{n\geq 1}$,

(iv) $\left(\dfrac{(-1)^n n^2 + 4}{2 + n^3}\right)_{n\geq 1}$,

(v) $\left(\sqrt{2n^2 + n + 1} - 2n\right)_{n\geq 1}$,

(vi) $\left(\dfrac{(-1)^n 5n - 2n - n\sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$,

(vii) $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\geq 1}$.

Hinweis: Benutzen Sie in (iv), (vi) und (vii) das Einschließungskriterium.

3. Aufgabe

2+1+2+2=7 Punkte

Betrachtet wird die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, die über die Startwerte $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und die Rekursionsgleichung

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ für } n > 1$$

gegeben ist. Ziel ist es, eine geschlossene Darstellung (Formel) für die Folgenglieder anzugeben.

(a) Machen Sie den Ansatz $a_n = x^n$ mit festem (aber unbekanntem) $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass genau für $x_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ und $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ die Rekursionsgleichung gilt.

(b) Weisen Sie nach, dass mit $(x_1^n)_n$ und $(x_2^n)_n$ auch $(\alpha x_1^n + \beta x_2^n)_n$ die Rekursionsgleichung erfüllt, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden können.

(c) Ziehen Sie die Startwerte $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ hinzu, um die beiden freien Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass die Folge $(\alpha x_1^n + \beta x_2^n)_n$ genau der Fibonacci-Folge entspricht. Geben Sie so berechnete geschlossene Form der Fibonacci-Folge an.

(d) Testen Sie ihr Ergebnis, indem Sie die Folgenglieder a_8, a_9, a_{10} mit der hergeleiteten expliziten Formel ermitteln und das Ergebnis mittels der rekursiven Darstellung kontrollieren.