UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

7. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Abgabe: Dienstag, 10.6.2014, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

3 + 1 + 1 Punkte

1. Zeigen Sie, dass die Konsistenzordnung des verbesserten Euler-Verfahrens größer gleich 2 ist.
2. Begründen Sie, dass die Konsistenzordnung gleich 2 ist.
   Hinweis: Stellen Sie das Verfahren mit Hilfe des Butcher-Schemas dar.
3. Betrachten Sie das konkrete Anfangswertproblem

$$y' = \sin(t+1)\sqrt{1+y} \quad , \quad y(0) = 1.$$

   Ist das verbesserte Euler-Verfahren für dieses Anfangswertproblem konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe

1.5 + 1.5 Punkte

1. Bestimmen Sie das Verfahren, welches zu folgenden Butcher-Schema gehört:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

2. Stellen Sie das Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j), \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{3}, y_j + \frac{h}{3}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_j + \frac{2h}{3}, y_j + \frac{h}{3}(3k_2 - k_1)\right), \\ k_4 &= f(t_j + h, y_j + h(k_1 - k_2 + k_3)), \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \end{aligned}$$

   der Stufe 4 mit Hilfe des Butcher-Schemas dar.

3. Aufgabe

3 Punkte

Betrachten Sie das folgende Butcher-Schema:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \alpha & \alpha & & \\ \beta & 0 & \beta & \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass das resultierende Verfahren mindestens Konsistenzordnung 2 hat.

4. Aufgabe

3 + 1 + 1 Punkte

In dieser praktischen Aufgabe soll das Eulersche Polygonzugverfahren implementiert werden. Hierzu werden zwei verschiedene Anfangswertprobleme

$$y' = 1 + (y - x)^2 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$y' = -200xy^2 \qquad \text{mit} \qquad y(-3) = \frac{1}{901}. \tag{2}$$

betrachtet. Das erste Anfangswertproblem soll auf dem Intervall $[0, 1.95]$ und das zweite auf dem Intervall $[-3, 3]$ untersucht werden.

1. Implementieren Sie in C oder Scilab das Eulersche Polygonzugverfahren für die beiden Anfangswertprobleme. Verwenden Sie eine gleichmäßige Diskretisierung des Intervalls in $n = 2^i$, $i = 0, \ldots, 15$ Teilintervalle.
2. Plotten Sie jeweils die exakte Lösung sowie die Approximationen zu den verschiedenen Werten von n in ein Koordinatensystem. Was können Sie erkennen?
3. Geben Sie zum Anfangswertproblem (1) den absoluten Approximationsfehler $|y_h(x^*) - y(x^*)|$ an der Stelle $x^* = 1.95$ für die verschiedenen Werte von n an. Hierbei bezeichnet y_h ihre approximative und y die exakte Lösung des Problems.

Senden Sie Ihr Programm an Ihre Bremserin, drucken Sie Ihre Ergebnisse aus den Aufgabenteilen 2. und 3. aus und fügen Sie sie Ihrem Übungsblatt, das Sie abgeben, hinzu. Sie müssen in der Lage sein, Ihr Programm vorzufüren und zu erläutern.

Hinweis: Die exakten Lösungen für die Anfangswertprobleme sind

$$\begin{aligned} y &= x - \frac{1}{x-2} \quad (1), \\ y &= \frac{1}{1 + 100x^2} \quad (2). \end{aligned}$$