UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

7. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2016-2017

Abgabe: Freitag, 16.12.2016, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

4 Punkte

Der Weihnachtsmann macht sich mit seinem Rentier Rudolph auf den Weg zu den Wichteln, um den Schlitten mit den Geschenken abzuholen. Wie jeder weiß, ist der Weihnachtsmann nun auch nicht mehr der Jüngste. Er lsäuft mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu dem 3 km entfernten Wichtelhaus. Sein Rentier hingegen, frisch und ausgeruht, springt mit 6 km/h durch den Wald. Sie starten gleichzeitig. Um sich mal so richtig auszutoben, läuft Rudolph schnurstracks zum Wichtelhaus, dreht dort um, läuft zurück zum Weihnachtsmann, dreht wieder um, läuft zum Wichtelhaus, zurück zum Weihnachtsmann, und so weiter. Wieviel Kilometer ist Rudolph wohl gelaufen, wenn der Weihnachtsmann am Wichtelhaus ankommt?
Die Zeit, die das Rentier zum Wenden braucht, soll vernachlässigt werden (Rudolph ist in der Tat äußerst wendig und flink).

Lösen Sie die Aufgabe zunächst, indem Sie eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ aufstellen, bei der s_k die Länge des Wegstücks ist, das Rudolph beim k-ten Mal vom Weihnachtsmann hin und zurück zum Wichtelhaus zurücklegt. Berechnen Sie dann den Wert dieser Reihe. Kann man die Aufgabe auch einfacher lösen?

2. Aufgabe

2+2=4 Punkte

Betrachten Sie die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$ und die entsprechende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(i) Nutzen Sie die Identität

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

um eine Formel für die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

herzuleiten.

(ii) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

3. Aufgabe

2+2+2+2+2+2+2+2+2=18 Punkte

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots,$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k^4+4},$

(d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+3}{k^3-k^2},$ (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-3}{k^2},$ (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3k+1}{2^k},$

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2^k}{k+3^k},$ (h) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!},$ (i) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k+7}{(k+3)^2}.$

Hinweis: Benutzen Sie das Leibnitz-, Majoranten-, Minoranten-, Vergleichs- und Quotientenkriterium.

4. Aufgabe

3+3=6 Punkte

(i) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+k^\alpha} \ ?$$

(ii) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{k+k^2} \ ?$$