UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

7. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2014

Abgabe: Donnerstag, 5.6.2014 vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

3+6+4+2 Punkte

Betrachten Sie die quadratische Form

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2.$$

1. Geben Sie eine symmetrische 2×2-Matrix A sowie $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$ an, sodass
$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c.$$
2. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix S mit $\det(S) = 1$, sodass $A = SDS^T$.
3. Substituieren Sie $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ in $q(\mathbf{x})$ und geben Sie die entstehende Gleichung $q(\mathbf{y}) = 0$ an.
4. Welchem geometrischen Objekt entspricht die Lösungsmenge der Gleichung $q(\mathbf{x}) = 0$?

3. Aufgabe

1+1+5 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Die Funktion soll auf Stetigkeit in Punkt $(0,0)$ untersucht werden. Dazu seien im Folgenden $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ beliebige Nullfolgen in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1. Betrachten Sie zunächst die Nullfolge
$$\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n, 0)$.
2. Was gilt für den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f(0, y_n)$?
3. Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ dennoch nicht stetig ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Nullfolge
$$\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Aufgabe

8 Punkte

Zeigen Sie, dass folgende Funktion stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$