UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 7. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2014

---

1. Aufgabe

Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) = (3-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 4(3-\lambda) - 5(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)^3 - 9(3-\lambda) = (3-\lambda)\big((3-\lambda)^2 - 9\big) = (3-\lambda)(3-\lambda-3)(3-\lambda+3) \\ &= -\lambda(3-\lambda)(6-\lambda)\end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$.
Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} & 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ \Rightarrow \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = x_1 - \frac{9}{2}x_3 + 2x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{5}{2}x_3 \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren sind also von der Form

$$\begin{pmatrix} 5x_3 \\ -3x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2x_3 \\ \text{und} \quad & x_2 = 0 \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren haben damit die Form

$$\begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} & 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2}x_3 \\ \Rightarrow \quad & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = x_1 - \frac{9}{2}x_3 + 2x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{5}{2}x_3 \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren sind also von der Form

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \alpha.$$

2. Aufgabe

1. $$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0$$

   Also ist $b = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})^\top$ und $c = 0$.
   Für den quadratischen Teil betrachtet man eine symmetrische Matrix A:

   $$x^\top Ax = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

   Mit Koeffizientenvergleich folgt $a_{11} = 1,\ a_{22} = 1,\ a_{12} = -1$, also

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Eigenwerte von A:

   $$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

   Also sind die Eigenwerte 0 und 2.
   Eigenvektor zu $\lambda = 0$:

   $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2.$$

   Eigenvektor zu $\lambda = 2$:

   $$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = -v_2.$$

   Damit erhält man eine ONB aus den Eigenvektoren:

   $$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Die daraus entstehende Matrix S hat wie gefordert Determinante 1:

   $$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned}
& x^\top Ax + b^\top x + c = 0 \\
\overset{x=Sy}{\Rightarrow} \quad & (Sy)^\top A(Sy) + b^\top (Sy) + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & y^\top S^\top ASy + b^\top Sy + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & y^\top Dy + (S^\top b)^\top y + c = 0.
\end{aligned}$$

Hier:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$S^\top b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Dy = 2y_1 \quad , \quad y^\top Dy = 2y_1^2.$$

Also ist die entstehende Gleichung $2y_1^2 + 2y_1 = 0$.

4. Im neuen Koordinatensystem sind die Lösungen $y_1 = 0$ und $y_1 = -1$ mit y_2 beliebig, dies entspricht zwei parallelen Geraden.

3. Aufgabe

1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge in $\mathbb{R}$, $x_n \neq 0\ \forall n$ (Also ist $(x_n, 0)^\top$ Nullfolge in $\mathbb{R}^2$). Damit ist $(x_n, 0) \neq (0,0)\ \forall n$ und $f(x_n, 0) = 0\ \forall n$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, 0) = 0 = f(0,0)$.

2. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge in $\mathbb{R}$, $y_n \neq 0\ \forall n$ (Also ist $(0, y_n)^\top$ Nullfolge in $\mathbb{R}^2$). Damit ist $(0, y_n) \neq (0,0)\ \forall n$ und $f(0, y_n) = 0\ \forall n$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(0, y_n) = 0 = f(0,0)$.

3. Betrachte die Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{B}} \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$x_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{1}{n} \quad \forall n.$$

Insbesondere ist $x_n \neq 0 \neq y_n\ \forall n$ und $x_n \to 0,\ y_n \to 0$, also $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Es ist aber

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{1}{2},$$

also ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$ und damit ist f nicht stetig in (0,0).

4. Aufgabe

Auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ist g stetig als Komposition stetiger Funktionen (Polynome) und $x^2 + y^4 \neq 0\ \forall (x,y) \neq (0,0)$. Um die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ zu zeigen, betrachten wir eine beliebige Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0 \neq y_n\ \forall n$ und $x_n \to 0,\ y_n \to 0$. Es gilt

$$0 \leq |g(x_n, y_n) = \left|\frac{x_n^2 y_n^2}{x_n^2 + y_n^4}\right| \leq \left|\frac{x_n^2 y_n^2 + y_n^5}{x_n^2 + y_n^4}\right| = \left|\frac{y_n^2(x_n^2 + y_n^4)}{x_n^2 + y_n^4}\right| = |y_n^2| = y_n^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mit dem Einschließungskriterium folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = 0 = g(0,0).$$

Da dies für jede beliebige Nullfolge gilt, folgt daraus die Stetigkeit von g in (0,0) und insgesamt ist g stetig auf $\mathbb{R}^2$.