UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

7. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2015

Abgabe: Donnerstag, 11.6.2015

---

1. Aufgabe

7+4 Punkte

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

1. Zeigen Sie dass f in jedem Punkt partiell differenzierbar ist und geben Sie die Ableitungen explizit an.
2. Ist f stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe

1+2+2+3 Punkte

Begründen Sie, dass die Funktionen

1. $f(x,y) = ye^x + \dfrac{x}{1+y^2} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R},$
2. $g(x,y) = x^3 + \cos(e^{xy}) \quad , \quad x, y \in \mathbb{R},$
3. $h(x,y) = \ln(xy)e^{y\sin(z)} \quad , \quad x, y, z > 0$

partiell differenzierbar sind und bestimmen sie jeweils alle partiellen Ableitungen.

3. Aufgabe

4+4+4 Punkte

Betrachten Sie die Helix $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Minimalstelle der Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)x_3 + x_3^2$, angewendet auf α, d.h. finden Sie t_0, sodass $F\big(\alpha(t_0)\big)$ minimal ist.
2. Berechnen Sie den Gradienten von $F(x_1, x_2, x_3)$.
3. Berechnen Sie das Skalarprodukt des Gradienten von F, ausgewertet in $\alpha(t)$, mit der Ableitung $\alpha'(t)$ und setzen Sie t_0 ein. Was stellen Sie fest?

4. Aufgabe

9 Punkte

Zeigen Sie, dass für die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, $f(a_{11}, \cdots, a_{nn}) = \det(A)$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ regulär,

$$D = \det(A) \left(A^{-1}\right)^T \quad , \quad D_{ij} = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die *Cramersche Regel*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

mit der *Adjunkten*

$$\operatorname{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

A_{ji} ist hier wie beim Laplaceschen Entwicklungssatz die Streichungsmatrix.