UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 8. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 24.6.2014

---

1. Aufgabe

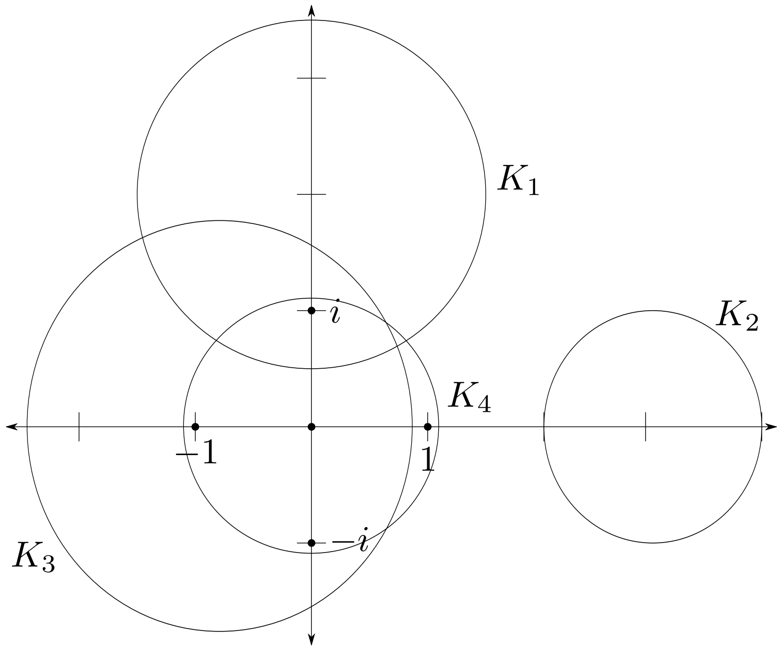
1.

$$
\begin{aligned}
& z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)=(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{z^2(z^4-1)}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z^2-1}+\frac{C}{z^2+1}=\frac{(A+B+C)z^4+(B-C)z^2-A}{z^2(z^4-1)} \\
\Rightarrow\quad & A=-1 \quad , \quad B-C=0 \quad \text{und} \quad A+B+C=0 \\
\Rightarrow\quad & A=-1 \quad \text{und} \quad B=C=\frac{1}{2} \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{z^2(z^4-1)}=-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2(z^2-1)}+\frac{1}{2(z^2+1)}, \\
& \frac{1}{z^2-1}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}=\frac{(A+B)z+A-B}{z^2-1} \\
\Rightarrow\quad & A+B=0 \quad \text{und} \quad A-B=1 \\
\Rightarrow\quad & A=-B=\frac{1}{2} \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}, \\
& \frac{1}{z^2+1}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}=\frac{(A+B)z+i(A-B)}{z^2+1} \\
\Rightarrow\quad & A+B=0 \quad \text{und} \quad A-B=-i \\
\Rightarrow\quad & A=-B=-\frac{i}{2} \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{z^2+1}=-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{i}{2(z+i)}. \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{z^2(z^4-1)}=-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{4(z+1)}-\frac{i}{4(z-i)}+\frac{i}{4(z+i)}.
\end{aligned}
$$

2. Es gilt im Allgemeinen für holomorphe f und Kreislinien K:

$$
\int\limits_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z=\begin{cases} 0 & , \; K \text{ umläuft } z_0 \text{ nicht} \\ \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_0) & , \; K \text{ umläuft } z_0 \end{cases} .
$$

Lage der Polstellen und der Kreislinien:



a) $K_1 = K\left(2i, \frac{3}{2}\right)$ umläuft nur $z_0 = i$, also

$$\int\limits_{K_1} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)}\,\mathrm{d}z = -\frac{i}{4}\int\limits_{K_1} \frac{z^7+1}{z-i}\,\mathrm{d}z = -\frac{i}{4}2\pi i\,\left.(z^7+1)\right|_{z=i} = \frac{\pi}{2}(1-i).$$

b) $K_2 = K(3,1)$ umläuft keine der Polstellen, also

$$\int\limits_{K_2} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

c) $K_3 = K(-1.3, \sqrt{\pi})$ umläuft -1, 0 und $\pm i$, also

$$\begin{aligned}
\int\limits_{K_3} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)}\,\mathrm{d}z &= -\frac{1}{4}\int\limits_{K_3} \frac{z^7+1}{z+1}\,\mathrm{d}z - \int\limits_{K_3} \frac{z^7+1}{z^2}\,\mathrm{d}z + \frac{i}{4}\int\limits_{K_3} \frac{z^7+1}{z+i}\,\mathrm{d}z - \frac{i}{4}\int\limits_{K_3} \frac{z^7+1}{z-i}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi i\Bigg(-\frac{1}{4}\,\left.(z^7+1)\right|_{z=-1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left.(z^7+1)\right|_{z=0} + \frac{i}{4}\,\left.(z^7+1)\right|_{z=-i} \\
&\qquad -\frac{i}{4}\,\left.(z^7+1)\right|_{z=i}\Bigg). \\
&= 2\pi i\left(0+0-\frac{1+i}{4}+\frac{i}{4}(i+1)\right) = -i\pi.
\end{aligned}$$

d) $K_4 = (0, 1.1)$ umläuft alle Polstellen, also kommt zu dem Integral über K_3 noch der Term

$$\frac{1}{4}\int\limits_{K_4} \frac{z^7+1}{z-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}2\pi i\,\left.(z^7+1)\right|_{z=1} = \pi i.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int\limits_{K_4} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)}\,\mathrm{d}z = -\pi i + \pi i = 0.$$

2. Aufgabe

f lässt sich als auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ schreiben mit $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k+1)(k+2)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!}.$$

Damit folgt

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{0!} = e - 2.$$

3. Aufgabe

1.

$$\begin{aligned}
& \psi(z,\xi) = \exp\big((x+iy)(\alpha+i\beta)\big) = \exp\big(x\alpha - y\beta + i(x\beta + y\alpha)\big) \quad \text{für } z = x+iy, \xi = \alpha + i\beta \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial \psi}{\partial x} = (\alpha + i\beta)\exp\big(x\alpha - y\beta + i(x\beta + y\alpha)\big) = \xi \exp(z\xi), \\
& \frac{\partial \psi}{\partial y} = (-\beta + i\alpha)\exp\big(x\alpha - y\beta + i(x\beta + y\alpha)\big) = i\xi \exp(z\xi) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - i\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(\xi - i \cdot i\xi)\exp(z\xi) = \xi \exp(z\xi).
\end{aligned}$$

2. Da γ durch keine Nullstelle von P verläuft, ist $z \mapsto \frac{\exp(z\xi)}{P(\xi)}$ komplex differenzierbar für alle ξ auf der Kurve γ. Weiterhin ist
$$z \mapsto \frac{\partial}{\partial z}\frac{\exp(z\xi)}{P(\xi)} \overset{1.}{=} \frac{\xi \exp(z\xi)}{P(\xi)}$$
stetig bezüglich ξ. Nach dem Satz über die Vertauschung von Integration und Differentiation gilt die behauptete Identität.

3. Mit derselben Begründung schließt man induktiv (Induktionsanfang $n = 0$ trivial):
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\int\limits_\gamma \frac{\exp(z\xi)}{P(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \quad = \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\int\limits_\gamma \frac{\exp(z\xi)}{P(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{IV}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int\limits_\gamma \frac{\xi^{n-1}\exp(z\xi)}{P(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \overset{\text{wie 2.}}{=} \int\limits_\gamma \frac{\xi^n \exp(z\xi)}{P(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

4. Offenbar folgt mit 3.
$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) f = \frac{c}{2\pi i} P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\int\limits_\gamma \frac{\exp(z\xi)}{P(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \frac{c}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{P(\xi)\exp(z\xi)}{P(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \frac{c}{2\pi i}\int\limits_\gamma \exp(z\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$
Da $\xi \mapsto \exp(z\xi)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph ist, folgt nach dem Cauchy-Integralsatz
$$\int\limits_\gamma \exp(z\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$
und somit $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) f = 0$.

5. Es ist
$$\begin{aligned}
& \frac{1}{P(\xi)} = \frac{1}{(\xi-2)(\xi+2)} = \frac{A}{\xi - 2} + \frac{B}{\xi + 2} = \frac{(A+B)\xi + 2(A-B)}{P(\xi)} \\
\Rightarrow \quad & A + B = 0 \quad \text{und} \quad 2(A-B) = 1 \\
\Rightarrow \quad & A = -B = \frac{1}{4} \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{P(\xi)} = \frac{1}{4(\xi-2)} - \frac{1}{4(\xi+2)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt für die erste Anfangsbedingung

$$
\begin{aligned}
0 = f(0) &= \frac{c}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{1}{P(\xi)} \,\mathrm{d}\xi = \frac{c}{8\pi i} \left(\int\limits_\gamma \frac{1}{\xi - 2} \,\mathrm{d}\xi - \int\limits_\gamma \frac{1}{\xi + 2} \,\mathrm{d}\xi \right) \\
\Leftrightarrow \quad \int\limits_\gamma \frac{1}{\xi - 2} \,\mathrm{d}\xi &= \int\limits_\gamma \frac{1}{\xi + 2} \,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

Das ist gerade der Fall, wenn entweder beide Polstellen oder keine der Polstellen umlaufen werden. Für die zweite Anfangsbedingung ergibt sich

$$
c = f'(0) = \frac{c}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\xi}{P(\xi)} \,\mathrm{d}\xi = \frac{c}{8\pi i} \left(\int\limits_\gamma \frac{\xi}{\xi - 2} \,\mathrm{d}\xi - \int\limits_\gamma \frac{\xi}{\xi + 2} \,\mathrm{d}\xi \right).
$$

Würde γ keine der Polstellen umlaufen, wären auch diese Integrale 0 und die Fordernung $f'(0) = c$ unerfüllbar. Also muss γ beide Polstellen umlaufen. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_\gamma \frac{\xi}{\xi - 2} \,\mathrm{d}\xi = 2\pi i \xi|_{\xi=2} = 4\pi i \quad , \quad \int\limits_\gamma \frac{\xi}{\xi + 2} \,\mathrm{d}\xi = 2\pi i \xi|_{\xi=-2} = -4\pi i \\
\Rightarrow \quad &\frac{c}{8\pi i} \left(\int\limits_\gamma \frac{\xi}{\xi - 2} \,\mathrm{d}\xi - \int\limits_\gamma \frac{\xi}{\xi + 2} \,\mathrm{d}\xi \right) = \frac{c}{8\pi i}(4\pi i + 4\pi i) = c.
\end{aligned}
$$