

8. Übung zur Vorlesung  
**Mathematik für Naturwissenschaftler I**  
Wintersemester 2016-2017

Abgabe: Freitag, 6.1.2017, vor der Vorlesung

---

### 1. Aufgabe

2+2+2=6 Punkte

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren jeweils die Potenzreihen

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x-1)^n, \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-1)^n, \quad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} n (x-1)^n.$$

### 2. Aufgabe

2+2+3=7 Punkte

(a) Geben Sie die Reihendarstellung der Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \exp(\mathbf{i}z)$ .

(b) Zeigen Sie, dass für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (\exp(\mathbf{i}z) + \exp(-\mathbf{i}z)), \quad \sin(z) = \frac{1}{2\mathbf{i}} (\exp(\mathbf{i}z) - \exp(-\mathbf{i}z)).$$

(c) Sei  $M \in \mathbb{R}$  eine Zahl mit  $M > 2016$ . Finden Sie  $w \in \mathbb{C}$ , sodass  $|\sin(w)| \geq M$ .  
Sind die Funktionen  $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt?

*Hinweis:* Benutzen Sie den Teil (b) und die Dreiecksungleichung.

### 3. Aufgabe

3+3+3=9 Punkte

Stellen Sie fest, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls. Bestimmen Sie zuachst jeweils den Definitionsbereich der entsprechenden Funktionen und formen Sie die Terme geschickt um, bevor Sie die Grenzwertregeln oder die Grenzwertdefinition verwenden.

$$\text{(a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}, \quad \text{(b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1}, \quad \text{(c) } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x+1}{x}}.$$

## 4. Aufgabe

$2+2+2+2+2=10$  Punkte

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches:

(a)

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

(b)

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad |x| = x(2H(x) - 1),$$

(c)

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = H(\sin x),$$

(d)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \leq 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & 0 < x < \pi \\ x, & x \geq \pi \end{cases},$$

(e)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-2}), & x > 0 \end{cases}.$$