UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 8. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2014

---

1. Aufgabe

1. Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f für festes y bezüglich x differenzierbar und umgekehrt mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2xy(x^4+y^2)-x^2y\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} = 2xy\frac{y^2-x^4}{(x^4+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^2(x^4+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^4+y^2)^2} = x^2\frac{x^4-y^2}{(x^4+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Für $(x,y)=(0,0)$ muss der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f\big((0,0)+he^i\big)-f(0,0)}{h}$$

für $i=1,2$ existieren.
$i=1$: Für $h\neq 0$ ist $(0,0)+h(1,0)=(h,0)\neq(0,0)$, also

$$f(h,0)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$i=2$: Für $h\neq 0$ ist $(0,0)+h(0,1)=(0,h)\neq(0,0)$, also

$$f(0,h)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Also ist f partiell differenzierbar in (0,0) mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

2. Betrachte die Folge $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^2$ mit

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad y_n = \frac{1}{n^2} \quad \forall n.$$

Insbesondere ist $x_n\neq 0\neq y_n$ $\forall n$ und $x_n\to 0,\ y_n\to 0$, also $(x_n,y_n)\to(0,0)$. Es ist aber

$$f(x_n,y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

also ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$ und damit ist f nicht stetig in (0,0).
Aus partieller Differenzierbarkeit folgt nicht Stetigkeit!

2. Aufgabe

Hält man eine bzw. zwei Variablen fest, so sind alle Funktionen bezüglich der anderen differenzierbar, also sind $f,\ g$ und h partiell differenzierbar.

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^x + \frac{1}{1+y^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x - \frac{2xy}{(1+y^2)^2}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 3x^2 - \sin(e^{xy})e^{xy}y,\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\sin(e^{xy})e^{xy}x.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{xy}ye^{y\sin(z)} = \frac{e^{y\sin(z)}}{x},\\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{1}{xy}xe^{y\sin(z)} + \ln(xy)e^{y\sin(z)}\sin(z) = \frac{e^{y\sin(z)}}{y} + \ln(xy)\sin(z)e^{y\sin(z)},\\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \ln(xy)e^{y\sin(z)}\cos(z).\end{aligned}$$

3. Aufgabe

1. $F\big(\alpha(t)\big) = \cos^2(2\pi t)t + \sin^2(2\pi t)t + t^2 = t + t^2$.
   Minimum: Setze Ableitung Null: $F'\big(\alpha(t)\big) = 1 + 2t = 0$. Also ist $t = -\frac{1}{2}$. Dies ist tatsächlich eine Minimalstelle, da die zweite Ableitung $2 > 0$ ist.

2. $\operatorname{grad}(F) = \begin{pmatrix} 2x_1x_3 \\ 2x_2x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 \end{pmatrix}$.

3. $\operatorname{grad}(F)\big(\alpha(t)\big) = \begin{pmatrix} 2t\cos(2\pi t) \\ 2t\sin(2\pi t) \\ 2t+1 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha'(t) = \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi t) \\ 2\pi\cos(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Das Skalarprodukt der beiden ist $2t+1$, wenn man die Minimalstelle einsetzt, erhält man 0, also ist an dieser Stelle der Gradient der Funktion senkrecht auf der Tangente der Kurve.

4. Aufgabe

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{ik}) \quad \text{(Laplacescher Entwicklungssatz)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(A_{ik}) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{ij}}\det(A_{ij}).\end{aligned}$$

Die Matrix A_{ik} hat folgende Form

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

d.h. sie enthält a_{ij} nicht. Damit ist die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det(A_{ik}) = 0.$$

Die andere Ableitung $\frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{ij}}$ ist nur dann nicht 0, wenn $a_{ik} = a_{ij}$. Also ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = \operatorname{adj}(A)_{ji} = \det(A) \left(A^{-1}\right)_{ji} = \det(A) \left(A^{-T}\right)_{ij} = D_{ij}.$$