

8. Übung zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler II
Sommersemester 2015

Abgabe: Donnerstag, 18.6.2015

1. Aufgabe

1+1+3+3+3+3+6 Punkte

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J_g und den Gradient ∇f (als Zeilenvektor) für

1. $g(x) = x$,
2. $g(x) = Ax$,
3. $f(x) = x^\top Ax$,
4. $f(x) = \|Ax\|^2$,
5. $f(x) = \|Ax\|$,
6. $f(x) = e^{\sin(\|Ax\|)}$,
7. $g(x) = (\nabla(x^\top Ax))^\top$.

2. Aufgabe

1+5+1+3 Punkte

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J_f von f .
2. Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f .
Hinweis: Sie können dabei genauso wie bei der Berechnung der Umkehrfunktion im Eindimensionalen vorgehen.
3. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion.
4. Berechnen Sie das Produkt $J_f(x, y)J_{f^{-1}}(f(x, y))$. Was stellen Sie fest? Schließen Sie daraus, was im Allgemeinen für die Jacobi-Matrix von f gelten muss, damit die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar ist.

3. Aufgabe

2+2+3+3 Punkte

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften für $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar:

1. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$.
2. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$.
3. $\operatorname{rot}(fF) = f\operatorname{rot}(F) + \operatorname{grad}(f) \times F$.
4. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(F)) - \Delta F$.