

9. Übung zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2013/2014

Abgabe: Freitag, 20.12.2013, vor der Vorlesung

1. Aufgabe

10 Punkte

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und $f \circ g$ stetig sind.

2. Aufgabe

5+5 Punkte

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \leq 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ falls } x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x_0 \neq 0$ stetig ist, aber unstetig ist in 0.

2. Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \leq 0 \\ x \exp(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 & , \text{ falls } x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g auf ganz \mathbb{R} stetig ist.

3. Aufgabe

10 Punkte

Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und skizzieren Sie den Graphen:

$$x \mapsto \begin{cases} -x & ; x \in (-\infty, 1] \\ x - 2 & ; x \in (1, 2) \\ 0 & ; x = 2 \\ -x^2 & ; x \in (2, 3] \\ x - 12 & ; x \in (3, 4) \\ -8 & ; x \in [4, \infty) \end{cases} .$$

4. Aufgabe

5+5 Punkte

1. Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein Punkt $\xi \in [0, 1]$ existiert mit $f(\xi) = \xi$. Ein solches ξ nennt man Fixpunkt von f .

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$ an.

2. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\exp(x) = 3x$$

(mindestens) eine Lösung $x \in (0, 1)$ hat.