

9. Übung zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure IV Sommersemester 2014

Abgabe: Dienstag, 24.6.2014, vor der Vorlesung

1. Aufgabe

3 Punkte

Betrachten Sie alle möglichen Kombinationen der vorgegebenen Runge-Kutta-Verfahren. Eignen sich diese zur Schrittweitensteuerung? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Ordnung 2

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{array}$$

b) Ordnung 3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

c) Ordnung 2

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \hline \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

d) Ordnung 4

2. Aufgabe

3.5 + 1.5 Punkte

Gegeben sei das folgende Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \hline \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{array}$$

1. Zeigen Sie mit Hilfe des lokalen Diskretisierungsfehlers, dass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren konsistent ist von der Ordnung $p = 2$.
2. Bestimmen Sie die Koeffizienten $b_i \in \mathbb{R}$ so, dass mit dem Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \hline \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

die Konsistenzordnung $p = 3$ erzielt wird.

3. Aufgabe

1 + 1.5 + 1 + 0.5 Punkte

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -2at \quad , \quad y(0) = y_0 \quad , \quad a \in \mathbb{R},$$

welches mit dem impliziten Euler-Verfahren gelöst werden soll.

1. Berechnen Sie die ersten drei Euler-Schritte η_1 , η_2 und η_3 .
2. Geben Sie eine Vermutung bezüglich der expliziten Darstellung des k -ten Euler-Schrittes η_k an und beweisen Sie die Darstellung.
3. Bestimmen Sie den globalen Diskretisierungsfehler $e(t, h)$ für das implizite Euler-Verfahren.
4. Berechnen Sie an der Stelle $t = 10$ den globalen Diskretisierungsfehler zur Schrittweite $h = 10^{-2}$.

4. Aufgabe

1.5 + 2.5 Punkte

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktionen der folgenden Verfahren:

1. Implizite Mittelpunkregel,
2. klassisches Runge-Kutta-Verfahren.

Geben Sie dabei die Matrizen $I_s - \mu A$ explizit an.