UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 9. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 1.7.2014

---

1. Aufgabe

Suche unter den gegebenen Verfahren diejenigen Paare, die eine Einbettung darstellen. Dies sind Verfahren unterschiedlicher Ordnung mit Übereinstimmung in den c_i und a_{ij} bis auf möglicherweise eine zusätzliche Stufe.
Überprüfung der möglichen Kombinationen:

- a), b): Einbettung vom Typ 2 (3),
- a), c): keine Einbettung, da gleiche Ordnung,
- a), d): keine Einbettung, da verschiedene c_i, a_{ij}, für $i \leq 2$,
- b), c): Einbettung vom Typ 2 (3),
- b), d): keine Einbettung, da verschiedene c_i, a_{ij}, für $i \leq 3$,
- c), d): keine Einbettung, da verschiedene c_i, a_{ij}, für $i \leq 3$.

2. Aufgabe

1. Zugehöriges Verfahren:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_k, y_k),\\
k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{h}{3}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(t_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}hk_2\right),\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{8}(k_1 + 2k_2 + 5k_3).
\end{aligned}$$

Entwicklung der Komponenten:

$$\begin{aligned}
y(t+h) &= y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + \mathcal{O}(h^4)\\
&\qquad y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(t, y(t)\big) = f_t + f_y f,\\
&\qquad y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_t + f_y f) = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y f_t + f_y^2 f\\
&= y + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^3}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y f_t + f_y^2 f) + \mathcal{O}(h^4),\\
k_1 &= f,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= f\left(\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} + \frac{h}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}\right) \\
&= f + \left\langle \begin{pmatrix} f_t \\ f_y \end{pmatrix}, \frac{h}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{9}\begin{pmatrix} 1 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{tt} & f_{ty} \\ f_{ty} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^3) \\
&= f + \frac{h}{3}(f_t + f f_y) + \frac{h^2}{18}\begin{pmatrix} 1 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{tt} + f_{ty}f \\ f_{ty} + f_{yy}f \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^3) \\
&= f + \frac{h}{3}(f_t + f f_y) + \frac{h^2}{18}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \mathcal{O}(h^3) \\
k_3 &= f\left(\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} + \frac{2}{3}h\begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= f + \frac{2}{3}h(f_t + f_y \underbrace{k_2}_{f+\frac{h}{3}(f_t+ff_y)+\mathcal{O}(h^2)}) + \frac{2}{9}h^2(f_{tt} + 2f_{ty}\underbrace{k_2}_{f+\mathcal{O}(h)} + f_{yy}\underbrace{k_2^2}_{f^2+\mathcal{O}(h^2)}) + \mathcal{O}(h^3) \\
&= f + \frac{2}{3}h\left(f_t + f_y f + \frac{h}{3}f_t f_y + \frac{h}{3}f f_y^2\right) + \frac{2}{9}h^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \mathcal{O}(h^3) \\
&= f + \frac{2}{3}h(f_t + f_y f) + \frac{2}{9}h^2(f_t f_y + f f_y^2 + f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
\tau(t,h) &= \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \phi\big(t, y(t), y(t+h), h\big) = \frac{y(t+h)-y(t)}{h} - \frac{1}{8}(k_1 + 2k_2 + 5k_3) \\
&= f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^2}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \frac{h^2}{6}(f_y f_t + f_y^2 f) \\
&\quad -\frac{1}{8}\Big(f + 2f + \frac{2}{3}h(f_t + f_y f) + \frac{h^2}{9}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + 5f + \frac{10}{3}h(f_t + f_y f) \\
&\qquad + \frac{10}{9}h^2(f_t f_y + f f_y^2) + \frac{10}{9}h^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2)\Big) + \mathcal{O}(h^3) \\
&= f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^2}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \frac{h^2}{6}(f_y f_t + f_y^2 f) \\
&\quad -\frac{1}{8}\left(8f + 4h(f_t + f_y f) + \frac{10}{9}h^2(f_t f_y + f f_y^2) + \frac{10}{9}h^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2)\right) + \mathcal{O}(h^3) \\
&= \underbrace{\frac{h^2}{36}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \frac{h^2}{36}f_y f_t + f_y^2 f}_{\neq 0} + \mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}
$$

2. Mit 1.:

$$
\begin{aligned}
\tau(t,h) &= f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^2}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \frac{h^2}{6}(f_y f_t + f_y^2 f) - b_1 f - b_2 f \\
&\quad -\frac{b_3}{3}h(f_t + f_y f) - \frac{b_2}{18}h^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) - b_3 f - \frac{2}{3}b_3 h(f_t + f_y f) \\
&\quad -\frac{2}{9}b_3 h^2(f_t f_y + f f_y^2) - \frac{2}{9}b_3 h^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \mathcal{O}(h^3)
\end{aligned}
$$

Also müssen folgende Bedingungen für die b_i gelten:

$$
\begin{aligned}
b_1 + b_2 + b_3 &= 0, \\
\frac{b_2}{3} + \frac{2}{3}b_3 &= \frac{1}{2}, \\
\frac{b_2}{18} + \frac{2}{9}b_3 &= \frac{1}{6}, \\
\frac{2}{9}b_3 &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$b_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad b_2 = 0 \quad , \quad b_3 = \frac{3}{4}.$$

Dies ist die Methode von Heun 3. Ordnung.

3. Aufgabe

1. $f(t, y) = -2at,\ t_k = kh.$

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= y_0, \\
\eta_1 &= \eta_0 + h(-2at_1) = y_0 - 2ah^2, \\
\eta_2 &= \eta_1 + h(-2at_2) = y_0 - 2ah^2 - 2ah \cdot 2h = y_0 - 2ah^2(1+2), \\
\eta_3 &= \eta_2 + h(-2at_3) = y_0 - 2ah^2(1+2) - 2ah^2 \cdot 3 = y_0 - 2ah^2(1+2+3).
\end{aligned}$$

2. Vermutung:

$$\eta_k = y_0 - 2ah^2 \sum_{j=1}^{k} j = y_0 - 2ah^2 \frac{k(k+1)}{2} = y_0 - ah^2 k(k+1).$$

Beweis durch Induktion:
IA $k = 0$: $\eta_0 = y_0$.
IV: Behauptung sei gezeigt für ein $k \in \mathbb{N}$.
IS $k \to k+1$:

$$\begin{aligned}
\eta_{k+1} &= \eta_k + hf(t_{k+1}, \eta_{k+1}) = \eta_k - 2ah^2(k+1) \overset{\text{IV}}{=} y_0 - ah^2 k(k+1) - 2ah^2(k+1) \\
&= y_0 - ah^2(k+1)(k+2).
\end{aligned}$$

3. Globaler Diskretisierungsfehler: $e(t_k, h) = y(t_k) - \eta(t_k, h)$.
Exakte Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}
& y'(t) = -2at \\
\Rightarrow\ & y(t) = -at^2 + c. \\
& y(0) = c = y_0 \\
\Rightarrow\ & y(t) = -at^2 + y_0.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$e(t_k, y) = -ak^2h^2 + y_0 - y_0 + ah^2k(k+1) = ah^2(k^2 + k - k^2) = ah^2k = aht_k$$

Also ist der Diskretisierungsfehler $e(t, h) = aht\ \forall t \in G_k$.

4. $e(t, h) = a \cdot 10^{-2} \cdot 10 = \dfrac{a}{10}$.

4. Aufgabe

1. Implizite Mittelpunktregel:

$$\begin{aligned}
& y_{k+1} = y_k + hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y\left(t_j + \frac{h}{2}\right)\right). \\
\Rightarrow\ & I_s - \mu A = 1 - \frac{\mu}{2} \\
\Rightarrow\ & (I_s - \mu A)^{-1} = \frac{2}{2 - \mu} \\
\Rightarrow\ & R(\mu) = 1 + \mu \left\langle b, (I_s - \mu A)^{-1} \mathbb{1} \right\rangle = \frac{2 + \mu}{2 - \mu}.
\end{aligned}$$

2. Klassisches Runge-Kutta-Verfahren:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad I_s - \mu A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad (I_s - \mu A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\mu^2}{4} & \frac{\mu}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\mu^3}{4} & \frac{\mu^2}{2} & \mu & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad R(\mu) &= 1 + \mu \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\mu^2}{4} & \frac{\mu}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\mu^3}{4} & \frac{\mu^2}{2} & \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 1 + \mu \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{\mu}{2} \\ 1 + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{4} \\ 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{4} \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 1 + \mu \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\mu}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\mu}{6} + \frac{\mu^2}{12} + \frac{1}{6} + \frac{\mu}{6} + \frac{\mu^2}{12} + \frac{\mu^3}{24} \right) \\
&= 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{6} + \frac{\mu^4}{24}.
\end{aligned}
$$