UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

9. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2015

Abgabe: Donnerstag, 25.6.2015 vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

1+2+2+2+3 Punkte

Berechnen Sie die Hessesche Matrix von f für

1. $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + ax + by + c$, wobei $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$;
2. $f(x, y) = (x\ y)A(x\ y)^\top$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;
3. $f(x, y) = e^{x+y}$;
4. $f(x, y) = e^{xy}$;
5. $f(x, y) = \sin(xy)$.

2. Aufgabe

2+8 Punkte

Betrachten Sie die Funktion

$$g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad g(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J_g von g. Für welche r und ϕ ist die Matrix J_g regulär?
2. Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\frac{\sin\phi}{r} \\ \sin\phi & \frac{\cos\phi}{r} \end{pmatrix} \operatorname{grad} h(r, \phi),$$

wobei $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ und $h = f \circ g$ (d.h. $h(r, \phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$).
Hinweis: Benutzen Sie die Kettenregel

$$\nabla h(r, \phi) = \nabla f(x, y) J_g(r, \phi)$$

und die Relation $\operatorname{grad} f = (\nabla f)^\top$.

3. Aufgabe

5+5 Punkte

1. Zeigen Sie, dass eine symmetrische $n \times n$-Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte positiv sind.
   Bemerkung: Dies gilt genauso für die anderen Fälle der Definitheit: A negativ definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte negativ, A positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte größer gleich 0, A negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte kleiner gleich 0, A indefinit $\Leftrightarrow$ Eigenwerte haben unterschiedliche Vorzeichen.

2. Bestimmen Sie die Definitheit der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & -9 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$