UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

10. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Abgabe: Dienstag, 1.7.2014, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

1 + 1 + 2 Punkte

Der sogenannte Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist für $z = re^{i\varphi}$ definiert als

$$\mathrm{Log(z)} = \ln\big(r(z)\big) + i\varphi(z) \quad , \quad -\pi < \varphi(z) < \pi.$$

Er ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, d. h. es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Log}(z) = \frac{1}{z}.$$

1. Berechnen Sie $\mathrm{Log}(i)$.
2. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-n} = -nz^{-n-1}.$$
3. Entwickeln Sie $\mathrm{Log}(z)$ in eine Potenzreihe um $z = i$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

2. Aufgabe

1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 Punkte

Bestimmen und klassifizieren Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und berechnen Sie die entsprechenden Residuen:

1. $f_1(z) = \frac{z^2}{(1+z)^3}$,
2. $f_2(z) = ze^{\frac{1}{1-z}}$,
3. $f_3(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$,
4. $f_4(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$.

3. Aufgabe

2 + 2 + 2 Punkte

1. Bestimmen Sie Lage, Art und zugehörige Residuen der Singularitäten von $f(z) = (1 + z^2)^{-2}$.
2. Zeigen Sie für die Kurve $\beta_R : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto Re^{it}$ die Eigenschaft

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

3. Skizzieren Sie die zusammengesetzte geschlossene Kurve $\gamma_R = \alpha_R \circ \beta_R$ mit $\alpha_R : [-R, R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t$ und wenden Sie den Residuensatz auf γ_R mit $R > 1$ an, um das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen.