UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 10. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 8.7.2014

---

1. Aufgabe

1. $r(i) = |i| = 1 \quad , \quad \varphi(i) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i.$

2. Beweis durch vollständige Induktion:
   IA $n = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{z} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x+iy} = -\frac{1}{(x+iy)^2} = -\frac{1}{z^2},\\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{z} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x+iy} = -\frac{i}{(x+iy)^2} = -\frac{i}{z^2}\\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z} &= \frac{1}{2}\Bigg(-\frac{1}{z^2} - i\Big(-\frac{i}{z^2}\Big)\Bigg) = -\frac{1}{z^2}.\end{aligned}$$

   IV: Behauptung sei gezeigt für $n \in \mathbb{N}$.
   IS $n \to n+1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z}z^{-n}\right) \overset{\text{IV}}{=} -\frac{1}{z^2}z^{-n} + \frac{1}{z}(-nz^{-n-1}) = -z^{-n-2} - nz^{-n-2} = -(n+1)z^{-n-2}.$$

3. $\mathrm{Log}(z)$ ist als Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf einer Umgebung von $z_0 = i$ holomorph, also

$$\mathrm{Log}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{\mathrm{Log}^{(n)}(i)}{n!}.$$

   Nach 1. ist $\mathrm{Log}(i) = i\frac{\pi}{2}$. Nach 2. gilt für $n \geq 1$:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\mathrm{Log}(z) = \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}z^{-1} = -\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}z^{n-2}}z^{-2} \overset{\text{induktiv}}{=} (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}.$$

   Damit ist

$$\mathrm{Log}(z) = i\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}i^{-n}(z-i)^n = i\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}(z-i)^n.$$

   Konvergenzradius:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad r = 1.$$

2. Aufgabe

1. f_1 hat die Darstellung
$$f_1(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p}$$
mit $g(z) = z^2$ holomorph, $z_0 = -1$ und $p = 3$. Also hat f_1 einen Pol der Ordnung 3 in $z_0 = -1$.
$$\operatorname{res}_{-1}(f_1) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to -1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z+1)^3 f_1(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} z^2 = 1.$$

2. Singularität bei $z_0 = 1$.
Es gilt
$$\begin{aligned} z e^{\frac{1}{1-z}} &= z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^k = (z-1+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-(k-1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-k} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(z-1)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(-1)^k}{k!}\right)(z-1)^{-k}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{z-1}_{\text{Nebenteil}}. \end{aligned}$$
Hauptteil bricht nicht ab (unendlich viele Summandanden $\neq 0$), also wesentliche Singularität.
Residuum: der zu $(z-1)^{-1}$ gehörige Koeffizient:
$$\operatorname{res}_1(f_2) = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^1}{1!} = -\frac{1}{2}.$$

3. $f_3(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)(z-1)^2}$.
Also Pole 1. Ordnung bei $z = \pm i$ und 2. Ordnung bei $z = 1$.
$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i(f_3) &= \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z-1)^2} = \frac{1}{2i(i-1)^2} = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{res}_{-i}(f_3) &= \lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-i)(z-1)^2} = \frac{1}{-2i(-i-1)^2} = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{res}_1(f_3) &= \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z^2+1} = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}\bigg|_{z=1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Singularitäten bei $z = n,\ n\in\mathbb{Z}$.
Da
$$\lim_{z\to n}\frac{\sin(\pi z)}{z-n} \neq 0 \quad \text{für } n\in\mathbb{Z},$$
lässt sich f_4 jeweils schreiben als
$$f_4(z) = \frac{g(z)}{z-n} \quad \text{mit} \quad g(z) = \frac{z-n}{\sin(\pi z)} \text{ holomorph.}$$
Also Pole der Ordnung 1.
$$\operatorname{res}_n(f_4) = \lim_{z\to n} g(z) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(\pi z)\big|_{z=n}} = \frac{1}{\pi\cos(\pi n)} = \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

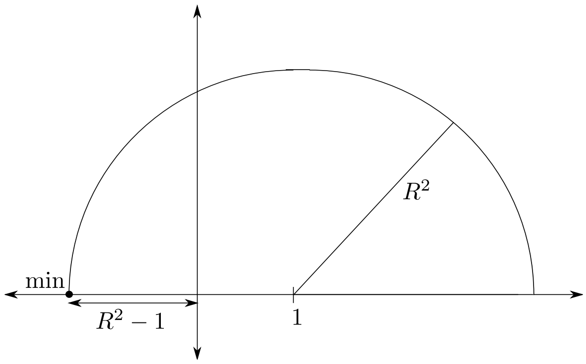
3. Aufgabe

1. $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$. Also Polstellen 2. Ordnung in $z = \pm i$.

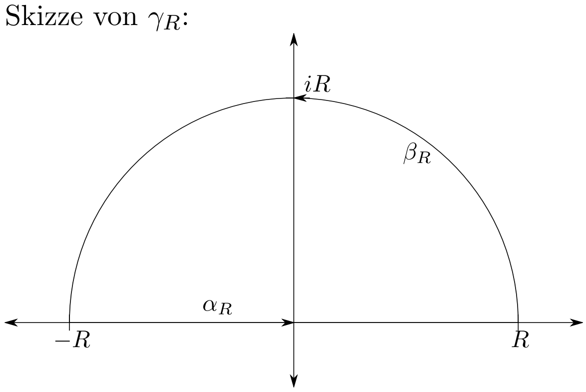
$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_i(f) &= \lim_{z\to i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(z+i)^2} = -\frac{2}{(z+i)^3}\bigg|_{z=i} = -\frac{2}{8i^3} = \frac{1}{4i},\\
\operatorname{res}_{-i}(f) &= \lim_{z\to -i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(z-i)^2} = -\frac{2}{(z-i)^3}\bigg|_{z=-i} = -\frac{2}{-8i^3} = -\frac{1}{4i}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{(1+R^2e^{2it})^2}\,\mathrm{d}t\right| = R\left|\int_0^\pi \frac{e^{it}}{(1+R^2e^{2it})^2}\,\mathrm{d}t\right| \le R\int_0^\pi \left|\frac{1}{(1+R^2e^{2it})^2}\right|\mathrm{d}t\\
&\le R\pi \sup_{t\in[0,\pi]}\left(\left|\frac{1}{(1+R^2e^{2it})^2}\right|\right) = \pi R\frac{1}{(R^2-1)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned}$$



3. Skizze von γ_R:



Für $R > 1$ umläuft γ_R die Singularitäten, also

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}_i(f) = \frac{\pi}{2}.$$

Außerdem

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und}\\
\int_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2} - \int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow{R\to\infty} \frac{\pi}{2} - 0.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$