UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

10. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2016-2017

Abgabe: Montag, 23.1.2017, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

8 Punkte
Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die folgende Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} g'(x), & x < \frac{\pi}{4}, \\ ax + b, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 1, \\ \log x, & x > 1, \end{cases}$$

wobei $g(x) = (\cos(x))^2$.

2. Aufgabe

2+2+2+2=8 Punkte
Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Monotonieintervalle folgender Funktionen:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 3x^2 - \frac{x^4}{2}$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x^2 \exp(1 - x)$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \log\left(x^2 - 1\right)$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = x^4 - 8x^3$

3. Aufgabe

3+3=6 Punkte

(a) Der Energieverbrauch eines Wellensittichs im Flug in $\frac{J}{g \cdot km}$ wird näherungsweise durch die Formel

$$E(v) = \frac{1}{v}\left(0.31\,(v - 35)^2 + 92\right)$$

beschrieben. Dabei wird die Geschwindigkeit v in km/h gemessen. Welche Geschwindigkeit ist (ungefähr) am energieeffizientesten?

(b) Der Ertrag y einer Pflanzensorte wächst nicht beliebig mit der Düngung x, sondern lässt sich gemäß dem Gesetz von Mitscherlich wie folgt beschreiben:

$$y(x) = y_0 \left(1 - e^{-rx}\right).$$

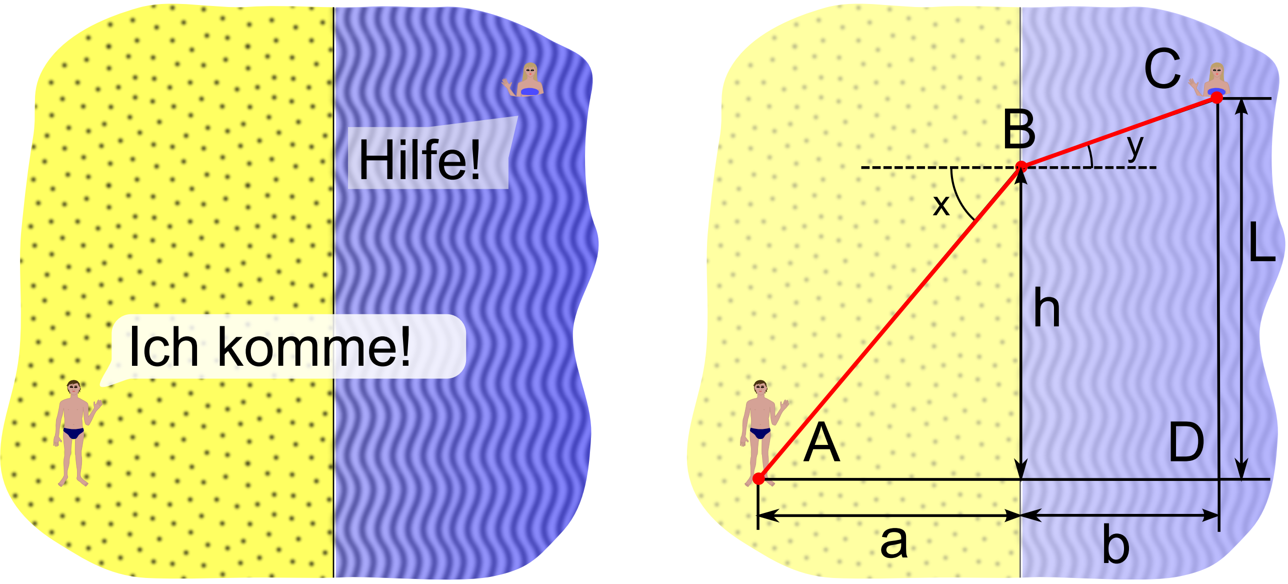
Hierbei bezeichnet y_0 die maximale Kapazität und r die relative Wachstumskonstante. Betrachtet wird nun der Gewinn

$$G(x) = p\,y(x) - kx,$$

der bei einem Absatz-Stückpreis von p und Düngungs-Stückkosten von k entsteht. Die Konstanten y_0, r, p, k werden alle als positiv vorausgesetzt. Ermitteln Sie, für wie viel Dünger der Gewinn maximal wird.

4. Aufgabe

5+5=10 Punkte



Betrachte die folgende Situation. Pamela braucht Hilfe. Sie befindet sich im See b Meter von der Küste (Punkt C). David sieht das. Er steht auf dem Strand a Meter von der Küste und L Meter von Pamela entlang der Küste (Punkt A). David will ihr so schnell wie möglich zu Hilfe kommen. Er läuft mit der Geschwindigkeit $v_1 = 10\ m/s$ und schwimmt mit $v_2 = 1\ m/s$.

i) Zeigen Sie, dass die beste Position, an der David zu schwimmen anfangen sollte (Punkt B), nicht auf der Geraden AC liegt. Beweisen Sie, dass die Ungleichung $h > La/(a+b)$ für den optimalen Abstand h gilt.

ii) Zeigen Sie, das die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 die folgende Relation mit den Winkeln x und y haben (siehe Bild)

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Hinweis: Zuerst schreiben Sie die notwendige Zeit als $T(h) = T_1(h) + T_2(h)$, wobei $T_1(h)$ die Zeit, die David läuft und $T_2(h)$ die Zeit, die er schwimmt. i) Untersuchen Sie die Monotonieintervalle für die Funktion $T : [0, L] \to \mathbb{R}$, um zu zeigen, dass eine Minimumstelle existiert, die oben genannte Ungleichung erfüllt. ii) Die Relation folgt aus der Bedingung $T'(h) = 0$.