UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 11. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 17.7.2014

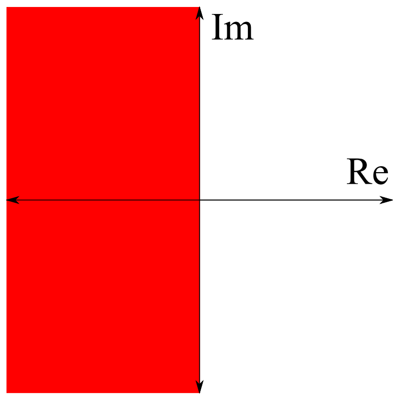
---

1. Aufgabe

Stabilitätsgebiet: $S = \{\mu \in \mathbb{C} : |R(\mu)| \leq 1\}$.
Nach Aufgabe 4, Blatt 9 ist

$$R(\mu) = \frac{2+\mu}{2-\mu}.$$

$$\begin{aligned}
& |R(\mu)| \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{2+\mu}{2-\mu}\right|^2 \leq 1 \\
\overset{\mu=x+iy}{\Leftrightarrow}\quad & \left|\frac{2+x+iy}{2-x-iy}\right|^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |2+x+iy|^2 \leq |2-x-iy|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (2+x)^2 + y^2 \leq (2-x)^2 + y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 4+4x+x^2 \leq 4-4x+x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x \leq 0 \\
\Rightarrow\quad & S = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\mu) \leq 0\}.
\end{aligned}$$



2. Aufgabe

1. $I_1 - \mu A = 1$, $R(\mu) = 1 + \mu$.

$$\begin{aligned}
& |R(\mu)| \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & |1+\mu|^2 \leq 1 \\
\overset{\mu=x+iy}{\Leftrightarrow}\quad & |1+x+iy|^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & (1+x)^2 + y^2 \leq 1. \\
\Rightarrow\quad & S(\mu) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \big(1 + \mathrm{Re}(\mu)\big)^2 + \mathrm{Im}(\mu)^2 \leq 1\right\} \quad \text{(Kreis mit Radius 1 um (-1,0)).}
\end{aligned}$$

Gesucht: μ^* mit $S \cap \mathbb{R}^- = [\mu^*, 0]$. $\mathrm{Im}(\mu^*) = 0$, also

$$\begin{aligned}
& \big(1 + \mathrm{Re}(\mu)\big)^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & -1 \leq 1 + \mathrm{Re}(\mu) \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & -2 \leq \mathrm{Re}(\mu) \leq 0 \\
\Rightarrow\quad & \mu^* = -2.
\end{aligned}$$

2. Bedingung an die Schrittweite h (Testproblem $y' = \lambda y$):

$$0 \leq h \leq \frac{\mu^*}{\lambda}.$$

Mit $\lambda = -100$ folgt

$$0 \leq h \leq \frac{\mu^*}{-100} \quad \overset{1.}{\Leftrightarrow} \quad 0 \leq h \leq \frac{1}{50} = 0.02.$$

Um Stabilität zu gewährleisten, darf die Schrittweite maximal $h = 0.02$ betragen.

3. $I_1 - \mu A = 1 - \mu$, $R(\mu) = 1 + \dfrac{\mu}{1-\mu} = \dfrac{1}{1-\mu}$.

$$\begin{aligned}
& |R(\mu) \leq 1| \\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{1}{1-\mu}\right|^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 \leq |1-\mu|^2 \\
\overset{\mu=x+iy}{\Leftrightarrow}\quad & 1 \leq |1-x-iy|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 \leq (1-x)^2 + y^2. \\
\Rightarrow\quad & S = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \big(1 - \mathrm{Re}(\mu)\big)^2 + \mathrm{Im}(\mu)^2 \geq 1\right\} \\
& \text{(komplexe Ebene außerhalb des Kreises um (1,0) mit Radius 1 einschließlich Rand).}
\end{aligned}$$

$S \cap \mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$, denn für $\mu \in \mathbb{R}^-$ gilt:

$$\begin{aligned}
& (1-\mu)^2 \leq 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - \mu > 1 \quad \vee \quad 1 - \mu < -1 \\
\Leftrightarrow\quad & \mu < 0 \quad \vee \quad \mu > 2
\end{aligned}$$

Das Stabilitätsgebiet enthält also die komplette linke Halbebene der komplexen Ebene. Damit ist das Euler-Verfahren A-stabil, also stabil für alle Schrittweiten. In Aufgabe 2, Blatt 5 wurde das explizite Euler-Verfahren mit $h = 0.05 > 0.02$ durchgeführt und deshalb war die Stabilitätsbedingung verletzt. Das implizite Euler-Verfahren war aber stabil.

3. Aufgabe

$$p(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) \quad \text{mit} \quad \phi_1(x) = 1,\ \phi_2(x) = x - 17,\ \phi_3(x) = (x-17)^2.$$

Bestimme Koeffizientenvektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\top$ durch Lösen der Normalengleichung $A^\top A\alpha = A^\top b$ mit $A = \big(\phi_1(x_i), \phi_2(x_i), \phi_3(\xi_i)\big)_{i=1,\cdots,5}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 26.8 \\ 10.3 \\ 2.9 \\ 5.9 \\ 19.1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad A^\top A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \quad , \quad A^\top b = \begin{pmatrix} 65 \\ -\ 19.8 \\ 199.8 \end{pmatrix}.$$

Zu lösen ist also ($A^\top A\alpha = A^\top b$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 65 \\ 0 & 10 & 0 & -\ 19.8 \\ 10 & 0 & 34 & 199.8 \end{array}\right).$$

Daraus erhält man $\alpha_1 = \frac{106}{35}$, $\alpha_2 = -\frac{99}{50}$ und $\alpha_3 = \frac{349}{70}$. Also ist

$$p(x) = \frac{106}{35} - \frac{99}{50}(x-17) + \frac{349}{70}(x-17)^2.$$

4. Aufgabe

1. $F(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{0.1\alpha_1}\cos(0.1\pi\alpha_2) - 0.395 \\ e^{0.2\alpha_1}\cos(0.2\pi\alpha_2) - 0.134 \\ e^{0.3\alpha_1}\cos(0.3\pi\alpha_2) + 0.119 \end{pmatrix}.$

2.

$$\begin{aligned} F_i(\alpha) &= f(x_i) - y_i = e^{\alpha_1 x_i}\cos(\alpha_2\pi x_i) - y_i. \\ \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_1} &= x_i e^{\alpha_1 x_i}\cos(\alpha_2\pi x_i), \\ \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_2} &= -\pi x_i e^{\alpha_1 x_i}\sin(\alpha_2\pi x_i). \\ J_F(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0.1e^{0.1\alpha_1}\cos(0.1\pi\alpha_2) & -0.1e^{0.1\alpha_1}\sin(0.1\pi\alpha_2) \\ 0.2e^{0.2\alpha_1}\cos(0.2\pi\alpha_2) & -0.2e^{0.2\alpha_1}\sin(0.2\pi\alpha_2) \\ 0.3e^{0.3\alpha_1}\cos(0.3\pi\alpha_2) & -0.3e^{0.3\alpha_1}\sin(0.3\pi\alpha_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Es ist

$$\alpha^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die erste Iterierte

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} + \Delta\alpha$$

erhält man durch Lösen des Gleichungssystems

$$J_F\left(\alpha^{(0)}\right)^\top J_F\left(\alpha^{(0)}\right)\Delta\alpha = -J_F\left(\alpha^{(0)}\right)^\top F\left(\alpha^{(0)}\right).$$

Es ist

$$J_F(0.1) = \begin{pmatrix} 0.1\cos(0.1\pi) & -0.1\sin(0.1\pi) \\ 0.2\cos(0.2\pi) & -0.2\sin(0.2\pi) \\ 0.3\cos(0.3\pi) & -0.3\sin(0.3\pi) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.095 & -0.097 \\ 0.162 & -0.369 \\ 0.176 & -0.762 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$J_F(0,1)^\top J_F(0,1) = \begin{pmatrix} 0.066 & -0.203 \\ -0.203 & 0.726 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$F(0,1) = \begin{pmatrix} \cos(0,1\pi) - 0.395 \\ \cos(0.2\pi) - 0.134 \\ \cos(0.3\pi) + 0.119 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.556 \\ 0.679 \\ 0.707 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$J_F(0,1)^\top F(0,1) = \begin{pmatrix} 0.287 \\ -0.842 \end{pmatrix}.$$

Gleichungssystem zur Bestimmung von $\Delta\alpha$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 0.066 & -0.203 & -0.287 \\ -0.203 & 0.726 & 0.842 \end{array}\right)$$

Die Lösung ist $\Delta\alpha_1 = -4.453$ und $\Delta\alpha_2 = -0.034$. Also ist

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.453 \\ 0.034 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.453 \\ 0.966 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Fehler

$$\begin{aligned} \left\| F(\alpha^{(0)} \right\| &= \sqrt{0.556^2 + 0.675^2 + 0.707^2} \approx 1.125, \\ \left\| F(\alpha^{(1)} \right\| &= \sqrt{0.216^2 + 0.203^2 + 0.280^2} \approx 0.408 < \left\| F(\alpha^{(0)} \right\|. \end{aligned}$$