

11. Übung zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler II
Sommersemester 2015

Abgabe: Donnerstag, 9.7.2015, vor der Vorlesung

1. Aufgabe

15 Punkte

Zeigen Sie, dass die folgenden Vektorfelder konservativ sind (finden Sie das Potential):

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \\ 3z^2 \end{pmatrix},$$
$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz} \\ xze^{xyz} \\ xye^{xyz} \end{pmatrix},$$
$$S(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \sin(x) - 2x \\ -2y \cos(x) + 4y \end{pmatrix},$$
$$U(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2x(1+x^2)^{-2}(1+e^y)^{-1} \\ -e^y(1+x^2)^{-1}(1+e^y)^{-2} \\ 4z^3 \end{pmatrix},$$
$$V(x, y) = \begin{pmatrix} -2x(1+x^2)^{-1} \\ -4y(1+y^2)^{-3} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Integrieren Sie die erste Komponente bzgl. x und dann differenzieren Sie das Ergebnis bzgl. y und/oder bzgl. z um mit der zweite und der dritte Komponenten zu vergleichen.

2. Aufgabe

3+3+4 Punkte

Berechnen Sie die Integrale

1. $\int_{-1}^3 \left(\int_0^1 3x^2 + 3y^2 + 4xy - 4x - 5y \, dx \right) dy,$

2. $\int_0^1 \left(\int_0^1 xe^{xy} \, dx \right) dy,$

3. $\int \left(\int \ln\left(\frac{y}{x}\right) \, dx \right) dy.$

3. Aufgabe

8 Punkte

Betrachten Sie die Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & , \quad 0 < x < y \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} & , \quad 0 < y < x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx .$$