UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 12. Übung zur Vorlesung

Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Sommersemester 2014

Besprechung: 24.7.2014

---

1. Aufgabe

1.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} 2\cos^3(t)+3\cos^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\left(2\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3+3\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\right)\frac{ie^{it}}{ie^{it}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{i}\int_{K(0,1)}\left(\frac{1}{4}\left(z+z^{-1}\right)^3+\frac{3}{4}\left(z+z^{-1}\right)^2\right)\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{4i}\int_{K(0,1)} z^2+3+3z^{-2}+z^{-4}+3z+6z^{-1}+3z^{-3}\,\mathrm{d}z\\ &\overset{\text{Res.s.}}{=} \frac{1}{4i}2\pi i\cdot 6 = 3\pi.\end{aligned}$$

2. $\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2(t)=\frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{2}{3+\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \overset{s=2t}{=} \int_0^{4\pi}\frac{1}{3+\cos(s)}\,\mathrm{d}s\\ &\overset{\text{period.}}{=} 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{3+\cos(s)}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{i}\int_{K(0,1)}\frac{1}{3+\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{4}{i}\int_{K(0,1)}\frac{1}{z^2+6z+1}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Singularitäten: $z^2+6z+1=0 \;\Leftrightarrow\; z=\pm2\sqrt{2}-3$

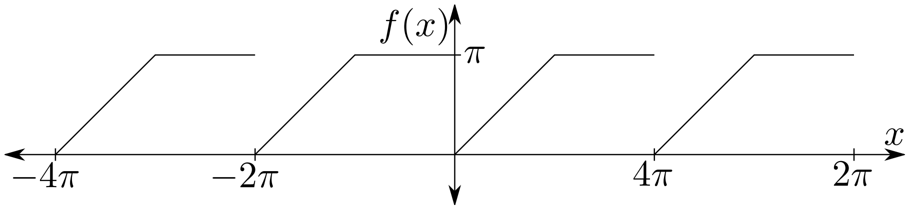
$$= \frac{4}{i}\int_{K(0,1)}\Big(\big(z-(2\sqrt{2}-3)\big)\big(z-(-2\sqrt{2}-3)\big)\Big)^{-1}\,\mathrm{d}z$$

$|2\sqrt{2}-3|<1<|-2\sqrt{2}-3| \;\Rightarrow\;$ nur $2\sqrt{2}-3$ wird von $K(0,1)$ umlaufen

$$= \frac{4}{i}2\pi i\left(z-(-2\sqrt{2}-3)\right)^{-1}\Big|_{z=2\sqrt{2}-3} = \frac{8\pi}{2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}+3} = \sqrt{2}\pi.$$

2. Aufgabe

1.



2.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x + \pi^2\right) = \frac{3}{2}\pi,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{p. I.}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) + \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{\pi}^{2\pi}\\
&= 0 + \left[\frac{1}{\pi n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} + 0 = \frac{1}{\pi n^2}\big((-1)^n - 1\big)\\
&= \begin{cases} 0 & ,\ n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & ,\ n \text{ ungerade} \end{cases},\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{p. I.}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) - \left[\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{\pi}^{2\pi}\\
&= -\frac{1}{n}(-1)^n + 0 - \frac{1}{n}\big(1-(-1)^n\big) = -\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Also ist die Fourier-Reihe

$$\frac{3}{4}\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx).$$

3. Die Identität enthält ungerade Terme $\frac{1}{n}$, also müssen die quadratischen (zu $\cos(nx)$ gehörigen) verschwinden. Die Nullstellen von cos sind dabei $n\frac{\pi}{2}$. Es wird also $x = \frac{\pi}{2}$ gewählt. f ist stetig in $x = \frac{\pi}{2}$, also

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Es gilt

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & ,\ n \text{ gerade} \\ (-1)^n & ,\ n = 2m+1 \end{cases}.$$

Damit folgt

$$\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4} = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$$

3. Aufgabe

1. $y'' + 2y = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & , \quad 1 \le t < 2 \end{cases}.$

2. $$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1, \\ a_n &= \int_0^2 F(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n\pi}\left[\sin(n\pi t)\right]_0^1 = 0, \\ b_n &= \int_0^2 F(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi t)\right]_0^1 = \frac{1}{n\pi}\big(1-(-1)^n\big) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n\pi} & , \quad n \text{ ungerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

   Also ist die Fourier-Reihe
   $$\frac{1}{2} + \sum_{\substack{n \text{ unger.} \\ n=1}}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi t).$$

3. Ansatz:
   $$\begin{aligned} y(t) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(c_n\cos(n\pi t) + s_n\sin(n\pi t)\big) \\ \Rightarrow \quad y''(t) &= -n^2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}\big(c_n\cos(n\pi t) + s_n\sin(n\pi t)\big). \end{aligned}$$

   Einsetzen in die Differentialgleichung:
   $$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(c_n(2-n^2\pi^2)\cos(n\pi t) + s_n(2-n^2\pi^2)\sin(n\pi t)\big) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n \text{ unger.} \\ n=1}}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\sin(n\pi t).$$

   Koeffizientenvergleich:
   $$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}, \\ c_n(2-n^2\pi^2) &= 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0 \quad (n \ge 1), \\ s_n(2-n^2\pi^2) &= \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n\pi} & , \quad n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s_n = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ gerade} \\ \frac{2}{n\pi(2-n^2\pi^2)} & , \quad n \text{ ungerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

   Also ist die spezielle Lösung
   $$y(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n \text{ unger.} \\ n=1}}^{\infty} \frac{2}{n\pi(2-n^2\pi^2)}\sin(n\pi t).$$