

12. Übung zur Vorlesung  
**Mathematik für Naturwissenschaftler I**  
Wintersemester 2016-2017

Abgabe: Montag, 6.2.2017

---

## 1. Aufgabe

$2+3+3+2+3=13$  Punkte

Gegeben sei die Funktion  $f : [-19, 21] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{100 + x}$ .

Das Ziel ist, diese Funktion mit dem Taylorpolynom ersten Grades zu approximieren.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten Grades zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , nämlich  $T_1(x, 0)$ .

(b) Finden Sie eine obere Schranke für den Betrag des Restglieds  $|R_1(x)|$ .

(c) Finden Sie das globale Maximum  $g_{max}$  und das globale Minimum  $g_{min}$  der Funktion

$$g : [-19, 21] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - T_1(x, 0).$$

(d) Berechnen Sie das Integral

$$\mathcal{I}_T = \int_{-19}^{21} T_1(x, 0) dx.$$

(e) Nutzen Sie das Ergebnis aus (c) um das Integral von  $f$  zu approximieren. Ohne das Integral

$$\mathcal{I}_f = \int_{-19}^{21} f(x) dx$$

zu berechnen, finden Sie ein  $h > 0$ , sodass  $|\mathcal{I}_f - \mathcal{I}_T| \leq h$ .

*Hinweis:* Es gilt  $\left| \int_{[a,b]} g(x) dx \right| \leq \int_{[a,b]} |g(x)| dx \leq (b-a) \max_{x \in [a,b]} |g(x)|$ .

## 2. Aufgabe

$2+2=4$  Punkte

(a) Betrachten Sie die beiden Integrale

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 x^2 dx \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_2 = \int_0^1 x^3 dx.$$

Geben sie an, welches der beiden Integrale das größere ist, ohne die Integrale explizit zu berechnen.

(b) Analog zu (a) betrachten Sie diesmal die Integrale

$$\mathcal{I}_3 = \int_1^2 x^2 dx \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_4 = \int_1^2 x^3 dx.$$

und geben sie an, welches der beiden Integrale das größere ist, ohne die Integrale explizit zu berechnen.

### 3. Aufgabe

$2+2+2+2+2=10$  Punkte

Berechnen sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_0^1 (4\sqrt{x} - 2x^3) dx, \quad \int_9^{16} \sqrt{\frac{1}{x^3}} dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx, \quad \int_0^1 x^2 \exp x dx.$$