

12. Übung zur Vorlesung  
**Mathematik für Naturwissenschaftler II**  
Sommersemester 2014

Abgabe: Donnerstag, 10.7.2014, vor der Vorlesung

---

### 1. Aufgabe

10 Punkte

Sei  $V$  die obere Hälfte der Kugel mit Radius 2 um den Nullpunkt, d.h.

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2, z > 0 \right\}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_V z \, dx \, dy \, dz.$$

### 2. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}.$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Transformation in verallgemeinerte Polarkoordinaten  $x = 2r \cos(\phi)$ ,  $y = 3r \sin(\phi)$ .

### 3. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie den zylindrischen Körper, dessen Boden in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt und durch  $x^2 + y^2 \leq 1$  beschrieben wird und dessen Deckel in der Ebene  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  liegt. Bestimmen Sie sein Volumen, indem Sie in Polarkoordinaten über  $z$  integrieren.

### 4. Aufgabe

10 Punkte

Die durch Rotation der Gauß-Kurve  $e^{-x^2}$  um die  $z$ -Achse entstandene Rotationsfläche bildet mit der Ebene  $z = e^{-1}$  einen Rotationskörper. Bestimmen Sie dessen Volumen.