UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

13. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2013/2014

Abgabe: Freitag, 31.1.2014, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

4+6 Punkte

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
2. Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^b x^2 dx$$
mit einer festen Zahl $b > 0$. Benutzen Sie dazu die äquidistante Zerlegung $\left\{\frac{jb}{n};\ j = 0, \ldots, n\right\}$.

2. Aufgabe

1+1+1+1+1.5+1.5+2+2 Punkte

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

1. $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{x} - 2x^3 dx,$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-3x} dx,$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} dx,$
4. $\displaystyle\int_9^{16} \sqrt{\frac{1}{x^3}} dx,$
5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx,$
6. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx,$
7. $\displaystyle\int_0^1 x \log\left(x^2+1\right) dx,$
8. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

Hinweis: Verwenden Sie in 5. und 6. partielle Integration. Substituieren Sie in 7. $x^2 + 1 = u$ und in 8. $x = \sin(u)$, dann integrieren Sie partiell.

3. Aufgabe

1+1+1+1+1+1+1+2 Punkte

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

1. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx,$	5. $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2} dx,$
2. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} dx,$	6. $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} dx,$
3. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$	7. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$
4. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{e^x} dx,$	8. $\int\limits_0^1 \log(x) dx.$

Hinweis: Verwenden Sie in 8. partielle Integration und dann die Regel von l'Hospital.

4. Aufgabe

5+5 Punkte

Finden Sie zu folgenden Funktionen eine Stammfunktion:

1. $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \dfrac{x+5}{(x+3)(x-1)},$
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{1}{1+e^x}.$

Hinweis: Verwenden Sie Partialbruchzerlegung. Substituieren Sie in 2. zunächst $u = e^x$.

Auf diesem Blatt können Sie Zusatzpunkte für die Klausurzulassung sammeln. Es wird nicht in den Übungen besprochen, aber es gibt eine Musterlösung auf der Website.