UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis
Dipl.-Math. E. Krämer

Lösung zur 13. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2014

---

1. Aufgabe

Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
& (x+1)y' = -(x+2)y \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{y'}{y} = -\frac{x+2}{x+1} \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{x+2}{x+1}dx \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(y) = -\int \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}dx = -x - \ln(x+1) + \ln(c) \\
\Leftrightarrow\quad & y(x) = c\frac{e^{-x}}{x+1}.
\end{aligned}$$

Variation der Konstanten für die inhomogene Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
& y(x) = c(x)\frac{e^{-x}}{x+1} \\
\Rightarrow\quad & y'(x) = c'\frac{e^{-x}}{x+1} + c\frac{e^{-x}(x+1) - e^{-x}}{(x+1)^2} \\
\Rightarrow\quad & c'e^{-x} - ce^{-x}\frac{x+2}{x+1} = -(x+2)\frac{ce^{-x}}{x+1} + 2\sin(x) \\
\Leftrightarrow\quad & c' = 2\sin(x)e^{x} \\
\Rightarrow\quad & c = \int 2\sin(x)e^{x}\,dx = 2\sin(x)e^{x} - 2\int \cos(x)e^{x}\,dx = 2\sin(x)e^{x} - 2\cos(x)e^{x} - 2\int \sin(x)e^{x}\,dx \\
\Leftrightarrow\quad & c = e^{x}\big(\sin(x) - \cos(x)\big) \\
\Rightarrow\quad & y(x) = c\frac{e^{-x}}{x+1} + \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x+1}.
\end{aligned}$$

Einsetzen des Anfangswertes:

$$y(0) = c - 1 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad c = 3.$$

Also ist die Lösung

$$y(x) = 3\frac{e^{-x}}{x+1} + \frac{\sin(x)+\cos(x)}{x+1}.$$

2. Aufgabe

1. Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$:
$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2.$$
Lösung der Differentialgleichung:
$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$
Anfangswerte:
$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -c_1, \\ y'(0) &= -c_1 + 2c_2 = -3c_1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1. \end{aligned}$$
Lösung des Anfangswertproblems:
$$y(t) = -e^{-t} + e^{2t}.$$

2. Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$:
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1.$$
Lösung der Differentialgleichung:
$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 t e^{t}.$$
Anfangswerte:
$$\begin{aligned} y(1) &= c_1 e + c_2 e = e \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -c_1, \\ y'(1) &= c_1 e + 2c_2 e = -c_1 e = e \quad \Leftrightarrow c_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1. \end{aligned}$$
Lösung des Anfangswertproblems:
$$y(t) = -e^{t} + t e^{t}.$$

3. Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$:
$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1.$$
Lösung:
$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}.$$
Anfangswerte:
$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -c_1, \\ y'(0) &= -c_1 + c_2 = -2c_1 = 2 \quad \Leftrightarrow c_{=} - 1 \quad \Rightarrow c_2 = c_1. \end{aligned}$$
Lösung des Anfangswertproblems:
$$y(t) = -e^{-t} + e^{t}.$$