UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

13. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2015

Abgabe: Donnerstag, 23.7.2015, vor der Vorlesung

---

1. Aufgabe

1+1.5+1.5+2+4+4+4+4+6+6 Punkte

Betrachten Sie ein Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$, das ein physikalichen Körper darstellt. Gegeben sei, dass der Körper die Massendichte $\rho : M \to (0, \infty)$ besitzt. Dann lässt sich die Gesamtmasse m_M von M berechnen als

$$m_M = \int_M \rho\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Der Schwerpunkt $x^s \in \mathbb{R}^n$ des Körpers M hat die Koordinaten

$$x_k^s = \frac{1}{m_M} \int_M x_k \rho\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n, \;\; k = 1, \ldots, n.$$

Zum Beispiel, im Fall $n = 2$ schreibt man die Formel für m_M und x^s auch als

$$\begin{aligned} m_M &= \int_M \rho\left(x, y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \\ x_1^s &= \frac{1}{m_M} \int_M x \rho\left(x, y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \\ x_2^s &= \frac{1}{m_M} \int_M y \rho\left(x, y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Schwerpunkte, skizzieren Sie die Körper, und markieren Sie die Schwerpunkte für

1. ein homogenes Intervall $M = [0, a] \subset \mathbb{R}^1$ $(\rho(x_1) = 1)$,
2. ein Intervall $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$ mit der Dichte $\rho(x_1) = x^\alpha$, wobei $\alpha > 0$,
3. ein homogenes Rechteck $M = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$ $(\rho(x_1, x_2) = 1)$,
4. ein Rechteck $M = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ mit der Dichte $\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{1+x_2}$,
5. ein Gebiet $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi/2,\ 0 < y < 2\sin(2x)\}$ mit der Dichte $\rho(x, y) = 1$,
6. ein Gebiet $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ x^3 < y < \sqrt{x}\}$ mit der Dichte $\rho(x, y) = 1$,
7. ein homogenes Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 2)$ und $(1, 1)$ $(\rho(x_1, x_2) = 1)$,
8. ein Gebiet $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x^2 < y < 9 - x^2\}$ mit der Dichte $\rho(x_1, x_2) = 1$,
9. ein Gebiet $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 3 - x^2 - y^2\}$ mit der Dichte $\rho(x_1, x_2, x_3) = 1$,
10. eine homogene Pyramide (ein homogenes Tetraeder) mit Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ $(\rho(x_1, x_2, x_3) = 1)$.