UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Dr. Richards Grzibovskis

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Lösung zur 14. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2015

---

1. Aufgabe

In Kugelkoordinaten $x = r\cos(\phi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\phi)\cos(\theta)$, $z = r\sin(\theta)$ bekommt man

$$\int_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r\sin(\theta) r^2 \cos(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r,$$

wobei $r^2\cos(\theta)$ die Funktionaldeterminante ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \\ &= 2\pi \int_0^2 r^3\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\mathrm{d}\theta = 4\pi.\end{aligned}$$

2. Aufgabe

Die Transformation $x = 2r\cos(\phi)$, $y = 3r\sin(\phi)$ hat die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} 2\cos(\phi) & -2r\sin(\phi) \\ 3\sin(\phi) & 3r\cos(\phi) \end{vmatrix} = 6r.$$

Der Flächeninhalt ist

$$\int_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 6r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = 6\pi.$$

3. Aufgabe

Die Menge lässt sich darstellen als

$$\begin{aligned} M &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in E, e^{-1} < z < e^{-(x^2+y^2)}\right\}, \text{ wobei} \\ E &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.\end{aligned}$$

Somit ist der Volumeninhalt gleich zu

$$\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_E \left(\int_{e^{-1}}^{e^{-(x^2+y^2)}} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_E e^{-(x^2+y^2)} - e^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

In Polarkoordinaten $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_E e^{-(x^2+y^2)} - e^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(e^{-r^2} - e^{-1}\right) r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = 2\pi\left(-e^{-1}\frac{1}{2} + \int_0^1 re^{-r^2}\mathrm{d}r\right) = \\ 2\pi\left(-e^{-1}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-1})\right) = \pi\left(1 - 2e^{-1}\right)\end{aligned}$$

4. Aufgabe

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$y_h(t) = e^{F(t)}, \text{ wobei } F(t) = \int -\frac{t+2}{t+1}\mathrm{d}t.$$

$$F(t) = \int -\frac{t+2}{t+1}\mathrm{d}t = -t - \log(t+1)$$

$$y_h(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}.$$

Die spezielle Lösung y_s ist

$$y_s(t) = y_h(t)\int \frac{b(t)}{y_h(t)}\mathrm{d}t, \text{ wobei } b(t) = \frac{2\sin(t)}{t+1}.$$

$$y_s(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}\int \frac{2\sin(t)e^t(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t = \frac{2e^{-t}}{t+1}\int \sin(t)e^t\mathrm{d}t.$$

Die partielle Integration liefert

$$\int \sin(t)e^t\mathrm{d}t = e^t\sin(t) - \int e^t\cos(t)\mathrm{d}t = e^t\sin(t) - e^t\cos(t) - \int \sin(t)e^t\mathrm{d}t.$$

Daraus folgt, dass

$$\int \sin(t)e^t\mathrm{d}t = e^t\frac{\sin(t)-\cos(t)}{2}.$$

Somit screiben wir die spezielle Lösung y_s als

$$y_s(t) = \frac{\sin(t)-\cos(t)}{1+t},$$

und die allgemeine Lösung y als

$$y(t) = cy_h(t) + y_s(t) = c\frac{e^{-t}}{1+t} + \frac{\sin(t)-\cos(t)}{1+t}.$$

Die Konstande c finden wir aus die Bedignung $y(0) = 2$

$$y(0) = c - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 3.$$

Also ist die Lösung

$$y(t) = 3\frac{e^{-t}}{t+1} + \frac{\sin(t)-\cos(t)}{t+1}.$$

2.

$$y'(t) = t^2\left(y(t)\right)^2,\ y(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{y'(\tau)}{\left(y(\tau)\right)^2}\mathrm{d}\tau = \frac{t^3}{3} \Rightarrow$$

$$\int_3^{y(t)} \frac{1}{s^2}\mathrm{d}s = \frac{t^3}{3} \Rightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{3} = \frac{t^3}{3} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{3}{1-t^3}$$