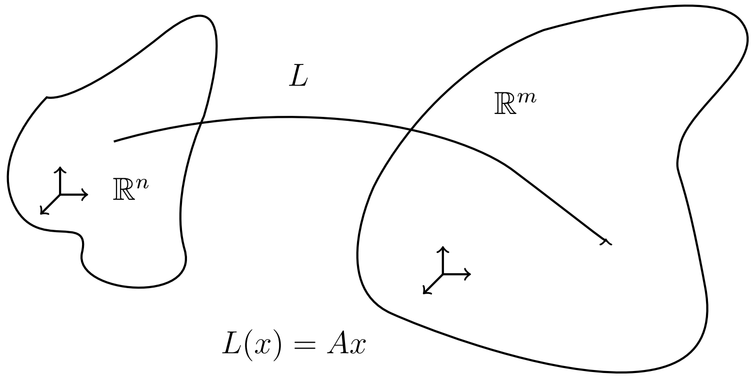
Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem: $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.



Bemerkung. 1. $b = 0 \in \mathbb{R}^m$. (Das Gleichungssystem heißt homogen)

(a) $A0 = 0 \implies$ Das LGS ist stets lösbar.

(b) Wenn $Ax = 0$ und $Ay = 0$, dann ist auch

i. $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$

ii. $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Das sind die Eigenschaften eines Vektorraumes, so dass

$$\mathrm{Kern} A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0\}$$

einer ist.

(c) $b \neq 0$

Wenn $Ax = b$ und $Ay = b$, dann ist gilt auch

i. $0 = Ax - Ay = A(x - y) \implies x - y \in \mathrm{Kern} A$,

ii. $A(x + z) = b$ für alle $z \in \mathrm{Kern} A$.

Satz. *1. Die Menge der Lösungen des homogenen LGS $Ax = 0$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, genannt der Kern der Matrix A. Notation* $\mathrm{Kern} A$.

Entweder ist $\mathrm{Kern} A = \{0\}$ *oder es ist*

$$1 \leq \dim \mathrm{Kern} A \leq n$$

mit $\dim \mathrm{Kern} A = k$. *Dann existiert eine Basis* $(x^{(1)}, ..., x^{(k)})$ *von* $\mathrm{Kern} A$ *und die Menge aller Lösungen des homogenen LGS ist*

$$\mathbb{L}_0 = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)}, \ \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. *Ist $x^{(s)}$ irgend eine Lösung des inhomogenen LGS $Ax^{(s)} = b$ ($x^{(s)}$ heißt spezielle oder partikuläre Lösung), so ist*

$$\mathbb{L} = \{x^{(s)} + x^{(0)},\ x^{(0)} \in \mathrm{Kern} A\}.$$

Quadratische Matrizen

Betrachtet werden hier nur Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Wenn das LGS $(A|0)$ eindeutig lösbar ist, d.h.

$$\mathbb{L}_0 = \{0 \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Kern} A,$$

dann ist $\dim \mathrm{Kern} A = 0$. Die Spalten von A sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Folglich ist das LGS $Ax = b$ stets eindeutig lösbar.
Weiter folgt, dass für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $Ax = b$ gilt. Die Abbildung $b \mapsto x$ ist linear. Deswegen ist diese Abbildung darstellbar als $x = Bb$.
Die Matrix B heißt die inverse von A. (Notation A^{-1}). Es gilt $x = A^{-1}b = A^{-1}Ax$ und $b = Ax = AA^{-1}b$. Somit folgt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Definition. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wenn eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

dann heißt A^{-1} die inverse Matrix zu A. Die Matrix A heißt dann regulär (invertierbar). (Sonst heißt die Matrix singulär).

Satz 1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist regulär (invertierbar).*

2. *Das LGS $(A|0)$ hat die Lösungsmenge*

$$\mathbb{L} = \{0 \in \mathbb{R}^n\}.$$

3. $\dim \mathrm{Kern} A = 0$ *(*$\mathrm{Kern} A = \{0\}$*).*

4. *Das LGS $Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar mit $x = A^{-1}b$.*

Beispiel. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei $ad - bc \neq 0$. Dann ist A regulär und die Inverse kann angegeben werden:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Verifizierung:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - cd & -cb + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -db + bd \\ ca - ca & -cb + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Bemerkung. Betrachte $\tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine Berechnung ergibt

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_1 \times \tilde{a}_2 = e_3(ad - cb) \neq 0 \\ \iff &\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \text{ sind linear unabhängig} \\ \iff &\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ sind linear unabhängig} \end{aligned}$$

Satz. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

1. *Ist A invertierbar, so ist ihre Inverse A^{-1} eindeutig bestimmt.*

2. *Ist $AC = I_n$ für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so folgt $CA = I_n$ und $B = A^{-1}$.*

3. *Ist auch $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auch invertierbar, so ist die Matrix AB invertierbar mit*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4. *Es gilt*

$$\begin{aligned} I_n^{-1} &= I_n, \\ (A^{-1})^{-1} &= A, \\ (A^\top)^{-1} &= (A^{-1})^\top. \end{aligned}$$

Berechnung der Inversen Matrix

Wir wollen nun ein Verfahren angeben, mit dem man feststellen kann, ob eine gegebene quadratische Matrix invertierbar ist, und mit dem sich die Inverse gegebenenfalls auch berechnen lässt.

Algorithmus (Berechnung der Inversen Matrix)**.** *Zunächst schreibt man die zu invertierende Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die Einheitsmatrix nebeneinander in eine Doppelmatrix*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & & & 1 \end{array}\right).$$

Anschließend versucht man, solange elementare Zeilenumformungen durchzuführen, bis auf der linken Seite eine obere Dreiecksmatrix steht (d.h. alle Einträge unterhalb der Diagonalen Null sind):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} d_1 & * & \dots & * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_n & * & \dots & \dots & * \end{array}\right).$$

Ist bei dieser oberen Dreiecksmatrix mindestens ein Diagonaleintrag $d_i = 0$, so ist A nicht invertierbar. Sind jedoch alle Diagonaleinträge in der oberen Dreiecksmatrix $\neq 0$, so ist A invertierbar. Durch weitere elementare Zeilenumformungen kann man dann erreichen, dass auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

Die Matrix $B = (b_{ij})_{i,j}$ auf der rechten Seite ist dann die Inverse von A.

Ist man lediglich an der Frage interessiert (und nicht an der Berechnung der Inversen), ob A invertierbar ist, so kann man auch ein einfacheres Kriterium benutzen, das wir später kennenlernen werden.

Beispiel. 1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Wir prüfen nun, ob A invertierbar ist und bestimmen gegebenenfalls die Inverse A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{rr} (II) \rightarrow & 3 \cdot (II) - 2(I) \\ (III) \rightarrow & (III) + (I) \\ & \end{array}\right] \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Da auf der linken Seite eine obere Dreiecksmatrix steht, deren Diagonaleinträge alle $\neq 0$ sind, ist A invertierbar und wir können fortfahren

$$\left[\begin{array}{rr} (I) \rightarrow & (I) - (III) \\ (II) \rightarrow & (II) - (III) \\ & \end{array}\right] \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{rr} (I) \rightarrow & 2(I) + (II) \\ & \\ & \end{array}\right] \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{rr} (I) \rightarrow & -\frac{1}{6}(I) \\ (II) \rightarrow & -\frac{1}{2}(II) \\ (III) \rightarrow & \frac{1}{2}(III) \end{array}\right] \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right).$$

Somit ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Beispielsweise das LGS $Ax = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat daher die eindeutige Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir gehen wie in (1) vor:

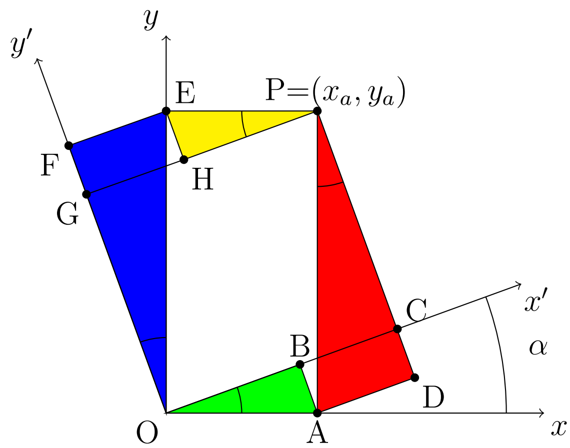
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} (II) \to & (II)+3(I) \\ (III) \to & (III)+(I) \\ & \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} (III) \to & (III)-(II) \\ & \\ & \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Da nun links eine obere Dreiecksmatrix erzeugt wurde und eine 0 auf der Diagonalen steht, ist A nicht invertierbar.

Drehmatrix



Wir betrachten einen Punkt $P = (x_a, y_a)$ und wollen das Koordinatensystem um einen Winkel α gegen den Uhrzeigersinn drehen. Wie sieht dann der Punkt $P' = (x_b, y_b)$ im neuen Koordinatensystem aus?

1. Es gilt im grünen Dreieck: $OB = OA \cos\alpha \implies OB = x_a \cos\alpha$.
2. Nach Konstruktion $BC = AD$.
3. Im roten Dreieck: $AD = AP \sin\alpha \implies AD = y_a \sin\alpha$.
4. $OC = OB + BC = x_a \cos\alpha + y_a \sin\alpha$.

Damit haben wir aber gerade die x-Koordinate von P' berechnet.

1. Im blauen Dreieck: $OF = OE \cos\alpha \implies OF = y_a \cos\alpha$.
2. Nach Konstruktion $FG = EH$.

3. Im gelben Dreieck: $EH = EP \sin\alpha \implies FG = x_a \sin\alpha$
4. $OG = OF - FG = y_a \cos\alpha - x_a \sin\alpha$.

Damit haben wir aber gerade die y-Koordinate von P' berechnet. Insgesamt haben wir die Bedingungen:

$$\begin{aligned} x_b &= x_a \cos\alpha + y_a \sin\alpha \\ y_b &= -x_a \sin\alpha + y_a \cos\alpha \end{aligned}$$

oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Möglichkeit ist es das Koordinatensystem nicht zu drehen, sondern den Punkt P um den Ursprung. Dazu mache man sich klar, dass dies eine Drehung im obigen Fall des Koordinatensystems um $-\alpha$ bedeutet. Für diesen (auch im nächsten Beispiel betrachteten) Fall ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}.$$

Beispiel (Verkettung von Abbildungen)**.**

1. Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, die eine Drehung um 30° gegen den Uhrzeigersinn beschreibt. Die inverse Matrix dazu beschreibt eine lineare Abbildung, die diesen Vorgang umkehrt. Es muss sich bei A^{-1} also um eine Drehung um 30° im Uhrzeigersinn handeln, so dass gilt:

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Das Produkt $A^{-1}A$ (bzw. AA^{-1}) ist dann die Einheitsmatrix I_2 und erzeugt damit die lineare Abbildung, die einen Vektor unverändert lässt.

2. Die beiden Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

beschreiben jeweils eine Drehung um 30° im Uhrzeigersinn um die erste bzw. die zweite Achse des Koordinatensystems des dreidimensionalen Raumes.

Auch eine Transformation, bei der zunächst die erste und dann die zweite Drehung ausgeführt wird, lässt sich mittels B_1 und B_2 beschreiben. Dies leistet die Matrix $B = B_2 B_1$ und die entsprechende lineare Abbildung

$$f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_B(x) = Bx = B_2 \underbrace{(B_1 x)}_{\substack{\text{erste}\\ \text{Drehung}}}.$$

Man kann B leicht durch Matrixmultiplikation berechnen:

$$\begin{aligned} B = B_2 B_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Wir betrachten nun die Matrix $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung

$$f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_C(x) = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation eines Vektors x mit der Matrix C entspricht damit der Projektion von x auf die erste Winkelhalbierende. Da man aus dem Vektor Cx nicht zurück auf x schließen kann, ist C nicht invertierbar (die Inverse müsste Cx zurück auf x abbilden). Mit den nachfolgenden Methoden kann man sich leicht davon überzeugen, dass C tatsächlich nicht invertierbar ist.

4. Wir untersuchen nun, wie man eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ findet, so dass die Multiplikation mit D einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ zunächst um 30° gegen den Uhrzeigersinn dreht und dann auf die 1. Winkelhalbierende projiziert. Analog zu Teil 2) leistet dies offenbar die Matrix $D = CA$ mit der linearen Abbildung

$$f_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_D(x) = Dx = C \underbrace{(Ax)}_{\substack{\text{gedrehter}\\ \text{Vektor}}}.$$

Man kann D wie folgt berechnen:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1) \\ \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1) & \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}.$$