An Archimedes wird man noch Denken, wenn Aischylos längst vergessen ist, denn Sprachen sterben, mathematische Ideen jedoch nicht.
Godfrey Harold Hardy
(1877-1947, britischer Mathematiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
C. Michel, M.Sc.

Vorbereitung zur Klausur

Höhere Mathematik für Ingenieure II im Sommersemester 2017

Besprechung Montag, den 24.07.2017 von 10:00-12:00 Uhr

Aufgabe 1. (Integrale)

1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

   (a) $\int \frac{16x+1}{8x^2-14x+3}\mathrm{d}x$

   (b) $\int \frac{x^3+2}{x^2+1}\mathrm{d}x$

   (c) $\int \frac{1}{11-4x-2x^2}\mathrm{d}x$

   (d) $\int \frac{1}{\exp(-x)+1}\mathrm{d}x.$

   Hinweis: Es gilt

   $$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Der Graph der Funktion

   $$f : (1,\infty) \to \mathbb{R},$$
   $$f(t) = \frac{1}{t}$$

   rotiere um die t-Achse. Es entsteht eine Art Horn.

   Zeigen Sie, dass der Volumeninhalt des Hornes endlich ist, sein Oberflächeninhalt jedoch unendlich.

Aufgabe 2. (Partielle Ableitungen, totale Differenzierbarkeit)

1. Geben sei die Funktion

   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
   $$f(x,y) = xy^2 + x^3\exp(x-2y).$$

   Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen von f bis einschließlich 2. Ordnung. Ist f total Differenzierbar? Warum gilt

   $$f_{xy}(x,y) - f_{yx}(x,y) = 0$$

   für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Betrachten Sie die Funktion $g(x,y) = \frac{\sin x}{\cos y}$. Geben Sie zunächst den größtmöglichen Definitionsbereich von g an. Bestimmen Sie anschließend alle partiellen Ableitungen von g bis einschließlich 2. Ordnung.

Aufgabe 3. (Laplace-Transformation)
Ein Elektron (Masse m, Ladung e) bewegt sich auf einer ebenen Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), 0)^\top$ unter dem Einfluss des elektrischen Feldes $\mathbf{E} = (0, E, 0)^\top$ und des magnetischen Feldes $\mathbf{H} = (0, 0, H)^\top$ $(E > 0\,, H > 0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - eH\dot{y} &= 0 \\ m\ddot{y} + eH\dot{x} &= eE \end{aligned} \qquad \mathbf{x}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) = 0\,.$$

Berechnen Sie die Gleichungen für die x- und y-Koordinate der Kurve des Elektrons mit Hilfe der Laplace-Transformation.
Hinweis: Setzen Sie für die Berechnungen $a := \frac{eH}{m}$ und $b := \frac{E}{H}$ und definieren Sie $\mathcal{L}[x](s) := X(s)$ und $\mathcal{L}[y](s) := Y(s)$.

Aufgabe 4. (Kettenregel)

1. Es sei $f : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und radial symmetrisch, d.h. $f(x,y,z) = \tilde{f}(r(x,y,z))$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \left\|(x,y,z)^\top\right\|_2$ und einer Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch Anwendung der Kettenregel:

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\mathrm{d}\tilde{f}(r)}{\mathrm{d}r}\frac{(x,y,z)^\top}{r}.$$

2. Es seien $f = f(u,v)$ und $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$\begin{aligned} f_{xx} &= f_u u_{xx} + f_v v_{xx} + f_{uu}(u_x)^2 + 2f_{uv}u_x v_x + f_{vv}(v_x)^2, \\ f_{yy} &= f_u u_{yy} + f_v v_{yy} + f_{uu}(u_y)^2 + 2f_{uv}u_y v_y + f_{vv}(v_y)^2, \\ f_{xy} &= f_u u_{xy} + f_v v_{xy} + f_{uu}u_x u_y + f_{uv}(u_x v_y + v_x u_y) + f_{vv}v_x v_y. \end{aligned}$$

   gilt.

Aufgabe 5. (Extrema)

1. Verwenden Sie einen Lagrangeschen Multiplikator, um die Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = x^n + y^n + z^n,$$

   wobei $n > 2$ eine ganze Zahle ist, unter der Nebendbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

   zu finden. Sie brauchen diese nicht zu klassifizieren!

2. Finden und klassifizieren Sie die kritischen Punkt der durch die Formel

$$f(x,y) = x^6 + 2x^4 - 8x^2y^2 + 2y^4$$

   definierten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. (Richtungsableitungen)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a \in U$. Angenommen, $\mathrm{grad} f(a) \neq 0$. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{grad} f(a)$ zeigt in die Richtung des größten Anstiegs von f.

2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Gilt 1. auch für $n = 2$ oder $n > 3$?