Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
Bertrand Russell
(1872-1970, britischer Philosoph)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

Vorbereitungsblatt zur Vorlesung

Numerik I im WS 2018/2019

Keine Abgabe.

Bitte melden Sie sich bis Sonntag, den **21. Oktober 2018**, für die Übungen an. Dies geschieht auf der Internetseite der Vorlesung:

`www.num.uni-sb.de/numerik`

Aufgabe 0.1. (0 Punkte)

Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Definitheit: $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- Homogenität: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \,:\, \|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$.
- Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Zeigen Sie, dass durch

(a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

(b) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i{}^2\right)^{1/2}$,

(c) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Vektornormen auf $\mathbb{R}^n$ definiert werden, wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

Aufgabe 0.2. (0 Punkte)

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i < j$. Eine Matrix heißt obere Dreiecksmatrix, wenn ihre Transponierte eine untere Dreiecksmatrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.

(b) Woran erkennt man, dass eine Dreiecksmatrix invertierbar ist? Welche Gestalt hat die Inverse einer regulären unteren Dreiecksmatrix?

— *bitte wenden* —

Aufgabe 0.3. (0 Punkte)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$ Matrizen. Das Kronecker-Produkt der Matrizen A und B ist definiert als

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{n2}B & \cdots & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mr\times ns}.$$

Zeigen Sie:

(a) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, sofern die auftretenden Matrizenprodukte definiert sind.

(b) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gilt

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B),$$

wobei $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$ die Spur von $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ist.

(c) Zeigen Sie: Die Determinante erfüllt für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n.$$

Ferner ist für reguläre Matrizen A und B auch $A \otimes B$ regulär mit der Inversen

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Aufgabe 0.4. (0 Punkte)
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und x_0 ein Punkt im Abschluss von I. Die Definition des Landau-Symbols $\mathcal{O}$ lautet:

$$\text{“}f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \to x_0\text{“} \Leftrightarrow \exists C\,,\, \delta > 0 : \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \;:\; \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < C.$$

(a) Zeigen Sie für $x \to x_0$:

(i) Aus $f_1(x) = \mathcal{O}(g_1(x))$ und $f_2(x) = \mathcal{O}(g_2(x))$ folgt $f_1(x)\, f_2(x) = \mathcal{O}(g_1(x)\, g_2(x))$.
(ii) Aus $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ und $g(x) = \mathcal{O}(h(x))$ folgt $f(x) = \mathcal{O}(h(x))$.

(b) Zeigen Sie: Für $x \to 0$ ist $\sin x = \mathcal{O}(x)$.