Mache die Dinge so einfach wie möglich - aber nicht einfacher.
Albert Einstein
(1879-1955, deutscher Physiker)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FR Mathematik
Prof. Dr. S. Rjasanow
D. Seibel, M. Sc.

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Numerik I im WS 2018/2019

Abgabe: Donnerstag, den 01.11.2018, um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1.1. (3 + 1 Punkte)

(a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 24 & 10 \\ 6 & 11 & 31 & 14 \\ 0 & 8 & 79 & 57 \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante.

(b) Lösen Sie unter Verwendung der LR-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (41, 228, 299, 754)^\top$.

Aufgabe 1.2. (1 + 3 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Aufgabenstellung, zu einer reellen Zahl $x > 0$ ihre Quadratwurzel $\sqrt{x}$ zu berechnen und zeigen Sie, dass für die relative Konditionszahl gilt

$$\kappa_{\text{rel}} \leq 1\,.$$

(b) Es seinen $x, y \in \mathbb{R}$. Zur Berechnung von $d = x^2 - y^2$ bieten sich die beiden folgenden Algorithmen an:

Algorithmus 1: $a_1 = x \odot x$, $b_1 = y \odot y$, $d_1 = a \oplus (-b)$.

Algorithmus 2: $a_2 = x \oplus y$, $b_2 = x \oplus (-y)$, $d_2 = a \odot b$.

Dabei bezeichnen $\odot$ und $\oplus$ die Gleitpunktmultiplikation bzw. -addition, deren Resultate vom exakten Wert um einen relativen Rundungsfehler abweichen:

$$a \odot b = a\,b(1+\epsilon)\,,\ a \oplus b = (a+b)(1+\tilde{\epsilon})\,.$$

Wie in der Vorlesung sei die relative Maschinengenauigkeit mit η bezeichnet, d.h. für die relativen Fehler gilt $|\epsilon| \leq \eta$, $|\tilde{\epsilon}| \leq \eta$.

Überlegen Sie sich, wann die Berechnung von d schlecht konditioniert ist (Auslöschung führender Ziffern) und begründen Sie durch Analyse der absoluten Fehler in d, welche der beiden Methoden in dieser Situation stabiler gegenüber relativen Rundungsfehlern ist.
Hinweis: Bei der Fehlerbetrachtung können Sie Fehlerterme höherer Ordnung, d.h. Produkte von relativen Rundungsfehlern etc., vernachlässigen.

Aufgabe 1.3. (1 + 3 Punkte)

(a) Sei $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, d.h. es gilt $M = M^\top$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von M reell sind.

(b) Eine symmetrische Matrix M heißt positiv definit, falls für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\langle Mx, x\rangle > 0.$$

Dabei ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

  (a) Alle Eigenwerte von M sind positiv.

  (b) $m_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$.

  (c) $\det(M) > 0$.

Aufgabe 1.4. (2 + 2 Punkte)
Im Rahmen der Vorlesung wurde gezeigt, dass für streng reguläre Matrizen eine LR-Zerlegung existiert, d.h. die Gauß-Elimination ist ohne Zeilen- und Spaltenvertauschung durchführbar. Eine weitere Klasse solcher Matrizen soll im Folgenden untersucht werden.

(a) Seien Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, so dass $k, l \in \{1, \dots, n\}, k \neq l$ existieren mit

$$|a_k| \geq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_j| \text{ und } |b_l| \geq \sum_{j=1,j\neq l} |b_j|$$

wobei $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ und $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ und $a_k \neq 0$. Der Vektor $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ werde durch $c_j := b_j - (b_k a_j)/a_k$ definiert. Man zeige, dass

$$|c_l| \geq \sum_{j=1,j\neq l}^{n} |c_j|.$$

(b) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine schwach diagonaldominante Matrix, d.h. es gilt für $i = 1, \dots, n$, dass

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Zeigen Sie, dass man auch bei einer regulären, schwach diagonaldominanten Matrix den Gauß-Algorithmus ohne Spalten- und Zeilenvertauschung ausführen kann.
Hinweis: Induktion über n.