FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

1. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **3+2=5 Punkte**

Gegeben seien die folgenden (Systeme von) Differentialgleichungen,

$$2y'(x) + 3y(x) = 49x^3 - 1, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)\,(a - by(t)) \\ \dot{y}(t) &= y(t)\,(c - dx(t))\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\dot{x}^2 + 2x = 0, \tag{3}$$

$$y^{(4)} = 7y^{(2)} - 2y^{(1)} + t, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y_1'' &= t^2 + 3y_1' - y_2^3 \\ y_2'' &= y_2' + y_1^3 \end{aligned}\,. \tag{5}$$

Bemerkung: $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y^{(k)} = \frac{d^ky}{dx^k}$ für $k \in \mathbb{N}^+$, $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$.

(a) Klassifizieren Sie die (Systeme von) Differentialgleichungen (1)-(5).

(b) Überführen Sie (5) in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Verwenden Sie dazu den Ansatz

$$u := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Aufgabe 2 **3+1+1=5 Punkte**

Sie haben sicherlich alle schon einmal feststellen müssen, dass Sie gelernten Stoff mit der Zeit wieder vergessen. Dieses Vergessen soll mathematisch modelliert werden. Dazu sei $P(t)$ der Prozentsatz des Wissens, den Sie zur Zeit t noch beherrschen. Wir nehmen an, dass Sie zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ den gesamten Stoff konnten, d.h. es gilt $P(0) = 100$. Desweiteren kann man davon ausgehen, dass ein bestimmter Prozentsatz $0 < b < 100$ nie vergessen wird. Die Änderung des Prozentsatzes in dem kleinen Zeitintervall $[t, t + dt]$ sei proportional zu dt und außerdem proportional zur Differenz von $P(t)$ und b, also zu dem Prozentsatz des gelernten Stoffes, den Sie zur Zeit t noch vergessen können.

(a) Bestimmen Sie durch einen Grenzübergang $dt \to 0$ eine Differentialgleichung und das Anfangswertproblem, welches P löst.

(b) Überprüfen Sie, ob $\bar{P}(t) = c \cdot e^{-at} + b$ für geeignete a und $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung aus (a) darstellt.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des in (a) ermittelten Anfangswertproblems.

Aufgabe 3 **2,5+2,5=5 Punkte**

Die Bewegungsgleichung eines linearen Oszillators mit Stokescher Reibung kann wie folgt formuliert werden:

$$mx'' + \alpha x' + kx = 0. \tag{7}$$

Hierbei bezeichnen m die Masse des schwingenden Körpers, k die Federkonstante und α die Reibungskonstante.

(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung von (7) indem Sie einen Exponentialansatz verwenden.
Das heißt: starten Sie mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und bestimmen Sie geeignete λ. Erhalten Sie mehrere linear unabhängige Lösungen, so ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination dieser.

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) um eine Lösung des folgenden Anfangwertproblems zu bestimmen:

$$2x'' + 3x' + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Aufgabe 4 **3+2=5 Punkte**

(a) Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0. \tag{8}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenen $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{2x}\sin(3x)$ und $y_3(x) = e^{2x}\cos(3x)$ Lösungen von (8) sind.

(b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$12xy + 3 + 6x^2 y' = 0, \quad y(1) = 1. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = \frac{3-x}{2x^2}, x > 0$ eine Lösung von (9) ist.

Abgabe: Donnerstag, 24.10.2019 **bis** 8.30 Uhr