FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

2. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **1.5 Punkte**

Die Funktionen $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$ und $y_3(x) = x^2$ lösen offensichtlich die homogene lineare Differentialgleichung

$$y''' = 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen y_1, y_2 und y_3 ein Fundamentalsystem für (1) bilden.

Aufgabe 2 **2+0.5=2.5 Punkte**

Auf Blatt 1 zeigten Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{2x}\sin(3x)$ und $y_3(x) = e^{2x}\cos(3x)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0 \tag{2}$$

sind.

(a) Stellen die Funktionen y_1, y_2 und y_3 ein Fundamentalsystem für (2) dar?

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2)?

Aufgabe 3 **1+2+2=5 Punkte**

Lösen Sie die folgenden homogenen Differentialgleichungen:

(a)
$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

(b)
$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

(c)
$$2y^{(4)} + 4y''' - 24y'' + 28y' - 10y = 0.$$

Aufgabe 4 **3+3=6 Punkte**

(a) In einem einfachen Infektionsmodell wird die Infektionsrate $I'(t)$ proportional (Proportionalitätskonstante $\alpha > 0$) zu den Kontakten zwischen den Infizierten ($0 \leq I(t) \leq 1$) und den nicht Infizierten einer Population ($P = 1$) angenommen.

Stellen Sie die Differentialgleichung für das einfache Infektionsmodell auf und zeigen Sie, dass für den Anfangswert $I(0) = I_0$

$$I(t) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{I_0}{1-I_0} \cdot e^{\alpha t}}$$

das Anfangswertproblem löst. Wie sieht der Grenzwert für $t \to +\infty$ aus?

(b) In einem erweiterten Modell wird die Heilungsrate ($\beta > 0$) berücksichtigt, die proportional zu den Infizierten ist.

Stellen Sie die Differentialgleichung für das erweiterte Modell auf und zeigen Sie, dass für den Anfangswert $I(0) = I_0$

$$I(t) = \frac{(\alpha - \beta)I_0}{\alpha I_0 + (\alpha - \beta - \alpha I_0) \cdot e^{-(\alpha-\beta)t}}, \ \alpha \neq \beta,$$

das Anfangswertproblem löst. Wie sieht der Grenzwert für $t \to +\infty$ in Abhängigkeit von den Konstanten α und β aus?

Aufgabe 5 **2+3=5 Punkte**

Eine Differentialgleichung der Form

$$u'(t) = f(t) \cdot u(t) + g(t) \cdot \big(u(t)\big)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

heißt **Bernoulli'sche Differentialgleichung**.

(a) Zeigen Sie, dass sich diese Differentialgleichung mit Hilfe der Substitution

$$z(t) = \big(u(t)\big)^{1-n}$$

in eine lineare Differentialgleichung für $z(t)$ überführen lässt.

(b) Bestimmen Sie mithilfe von (a) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y(x)$

$$y' = \frac{-2}{x} \cdot y + x^2 \cdot y^2.$$

Hinweis: Wählen Sie als Ansatz für die Lösung der lineare Differentialgleichung (für ein geeeignetes $z(t)$) ein Polynom dritten Grades.

Abgabe: Donnerstag, 31.11.2019 **bis** 8.30 Uhr