FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Wintersemester 2019/20

5. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **1+3+1=5 Punkte**

Gegeben sei die Menge

$$E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 | 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass gilt

$$E := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 | \underline{x}^\top A \underline{x} = 1\}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D derart, dass

$$D = S^\top A S$$

gilt.

(c) Was beschreibt die Menge

$$\tilde{E} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 | \underline{x}^\top D \underline{x} = 1\}?$$

Aufgabe 2 **2+2+3=7 Punkte**

Gegeben seien die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie (wenn möglich) $\underline{a}$ und $\underline{b}$ derart, dass sie Eigenvektoren von A sind.

(b) Berechnen Sie einen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor und den zugehörigen Eigenwert.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D, sodass

$$D = S^{\top} B S$$

für die folgenden Fälle gilt:

(i) $B = A$

(ii) $B = A^{-1}$.
Hinweis: Verwenden Sie dazu (i).

Aufgabe 3 **3 Punkte**

Beweisen Sie den Satz über "lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren" aus der Vorlesung: Sind $\underline{v}^{(1)}, ..., \underline{v}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so sind sie linear unabhängig.
Hinweis: Vollständige Induktion nach k.

Aufgabe 4 **2+3=5 Punkte**

Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen und jeweils die zugehörige geometrische und algebraische Vielfachheit. Sind die Matrizen diagonalisierbar?

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{in Abhängigkeit von} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Abgabe: Donnerstag, 21.11.2019 **bis** 8.30 Uhr