FB MI Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
M.Sc. Rebecca Klein

Wintersemester 2019/20

6. Übungsblatt zur Höheren Mathematik für Ingenieure 3

Aufgabe 1 **1+2+2=5 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit den entsprechenden algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(ii) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten aus (i) die dazugehörigen Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

(iii) Geben Sie eine Transformationsmatrix an und zeigen Sie, dass $S^{-1}AS$ der Jordanschen Normalform entspricht.

Aufgabe 2 **2+3=5 Punkte**

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform J von A.

(b) Geben Sie eine Transformationsmatrix S an, sodass gilt $J = S^{-1}AS$.

Aufgabe 3 **3+3=6 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 25 & -9 \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei $J = S^{-1}AS$ die Jordansche Normalform und damit A=SJS^{-1}. Drücken Sie A^2 mit Hilfe von J aus.

(b) Berechnen Sie A^{100}.
Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform und beweisen Sie eine Darstellung J^n für allgemeine $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 **2+2=4 Punkte**

(i) Finden Sie eine Matrix in Jordanscher Normalform, die die folgenden Eigenwerte hat:

- $\lambda_1 = 1$ mit $a(1) = 3$ und $g(1) = 1$
- $\lambda_2 = 2$ mit $a(2) = 4$ und $g(2) = 3$
- $\lambda_3 = 5$ mit $a(5) = 2$ und $g(5) = 2$

(ii) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitze nur die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Geben Sie eine Jordansche Normalform von A an für den Fall, dass

(a) die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte zwei ist.

(b) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert λ_1 eins ist, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert λ_2 drei und die geometrische zwei ist.

(c) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert λ_1 eins ist, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert λ_2 drei und die geometrische eins ist.

Abgabe: Donnerstag, 28.11.2019 **bis** 8.30 Uhr